

Verbesserte Staggered Fermionwirkungen für QCD Thermodynamik

Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Fakultät für Physik
der Universität Bielefeld

vorgelegt von
Burkhard Sturm

März 1999

Inhaltsverzeichnis

Einleitung	7
1 Die Gitterformulierung der QCD	13
1.1 Die naive Fermionwirkung	16
1.2 Die Standard Wilson-Eichwirkung	19
1.3 Die Wilson-Fermionwirkung	21
1.4 Die Kogut-Susskind Fermionwirkung	21
2 Verbesserte Eichwirkungen	29
2.1 Störungstheoretisch verbesserte Eichwirkungen	30
2.2 Perfekte Eichwirkungen	36
2.3 Thermodynamik und Hochtemperatur-Limes	40
3 Verbesserte Staggered Fermionwirkungen	47
3.1 On-Shell-Verbesserung nach Luo	48
3.2 Verbesserung der Flavour-Symmetrie – Fat-Links	54

4	Staggered Fermionwirkungen mit verbesserter Rotationssymmetrie bis $\mathcal{O}(g^2)$	61
4.1	Tree-level-Verbesserung	65
4.2	1-loop-Verbesserung	68
4.3	Freie Energiedichte bis $\mathcal{O}(g^2)$	73
4.4	Flavour-Symmetrie	80
	Zusammenfassung	83
A	Würfel-Operator in führender Ordnung g	87
B	Definitionen der Dimension-6 Fermionoperatoren	89
C	Anhang zu Kapitel 4	93
C.1	Allgemeine 1-loop-Resultate und Definitionen	93
C.2	Tree-level-Koeffizienten für die verbesserte Rotationssymmetrie	96
C.3	Verbesserte Rotationssymmetrie in $\mathcal{O}(g^2)$	97
C.4	Beiträge zur freien Energiedichte	98
C.5	Numerische Resultate zur freien Energiedichte	98
D	Mesonspektrum	101

Abbildungsverzeichnis

1.1	Graphische Darstellung des Doppeler-Problems	19
1.2	Hyperkubenstruktur der staggered Fermionen	24
2.1	Schematisches Flußdiagramm für asymptotisch freie Eichtheorien . . .	37
2.2	Cut-off-Abhängigkeit der gluonischen Energiedichte im Hochtemperatur-Limes	43
2.3	Cut-off-Abhängigkeit der gluonischen freien Energiedichte im Hochtemperatur-Limes	45
2.4	Druck p für Standard und verbesserte Eichwirkungen	46
3.1	Pion-Splitting in Gittereinheiten	57
3.2	Pion-Splitting in physikalischen Einheiten	59
4.1	Dispersionsrelationen für Impulse entlang der Koordinatenachsen . .	67
4.2	Dispersionsrelationen für Impulse entlang der Flächendiagonalen . .	68
4.3	1-loop-Koeffizienten für die Naik- und die p4-Wirkung	73
4.4	Fermionische Tree-level-Beiträge zur freien Energiedichte	77
4.5	Fermionische 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte für Standard und tree-level-verbesserte Fermionwirkungen	78

4.6	Fermionische 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte für tree-level- und 1-loop-verbesserte Fermionwirkungen	79
4.7	Pion-Splitting in physikalischen Einheiten für verbesserte Wirkungen	82

Einleitung

Das traditionelle Ziel der Teilchenphysik ist, die physikalischen Phänomene auf die Wechselwirkung fundamentaler, strukturloser Materieeinheiten zurückzuführen. Das Konzept der Zweifaltigkeit von Materie auf der einen Seite und Kräften, die zwischen diesen wirken, auf der anderen Seite wird durch Thomsons Entdeckung des Elektrons und Maxwells Theorie des elektromagnetischen Feldes illustriert, welche gemeinsam die Geburtsstunde der modernen Teilchenphysik markieren.

Im Laufe der Zeit hat dieses Bestreben zu einem immer tieferen Eindringen in die Strukturen der Materie geführt und damit auch zu einem Wandel in Bezug auf die Frage, welche Teilchen als elementar betrachtet werden. In den siebziger und achtziger Jahren hat man bedingt durch den Bau großer Teilchenbeschleuniger und immer präziesere experimentelle Meßmethoden einen ganzen Zoo von Teilchen entdeckt. Diese Vielzahl von Teilchen kann man aber auf eine relativ geringe Zahl von fundamentalen, strukturlosen Materieeinheiten zurückführen zwischen denen eine ebenfalls relativ geringe Zahl von Kräften wirkt; alle anderen Teilchen sind Bindungszustände der fundamentalen Einheiten, die über diese Kräfte gebildet werden.

Dabei hat sich seit etwa 30 Jahren das sogenannte Standard Modell der Teilchenphysik etabliert, welches als quantisierte Eichfeldtheorie formuliert ist, d.h. die Wechselwirkungen werden durch Eichfelder beschrieben, die nicht ad hoc vorgegeben werden, sondern durch das Prinzip der lokalen Eichinvarianz hervorgebracht werden. Das Standard Modell beschreibt zwei Typen von Materieeinheiten, Leptonen und Quarks, welche strukturlose Spin-1/2 Teilchen, also Fermionen, sind, sowie drei fundamentale Kräfte, die zwischen diesen Wirken, die elektromagnetische, die schwache und die starke Wechselwirkung. Die Leptonen sind eine direkte Verallgemeinerung des Elektrons, sie wechselwirken sowohl elektromagnetisch als auch schwach, die Quarks wechselwirken über alle drei Kräfte. Die Quanten der Wechselwirkungen sind Spin-1 Bosonen, die sogenannten Eichbosonen.

Der Erfolg des Standard Modells beruht auf einer Vielzahl von störungstheoretischen Vorhersagen experimenteller Befunde aus Streuexperimenten mit einer in der Physik bisher einmaligen Genauigkeit.

Den theoretischen Rahmen dieser Arbeit bildet der Teil des Standard Modells, der

die starke Wechselwirkung beschreibt, die QCD (*Quanten Chromo Dynamik*). Da die einzigen Elementarteilchen, die der starken Wechselwirkung unterliegen, die Quarks sind, werden alle anderen Teilchen in der QCD nicht berücksichtigt. Es gibt sechs Sorten (*Flavour*) von Quarks, die sich durch ihre Masse und elektrische Ladung unterscheiden. Ähnlich wie z.B. Elektronen Quellen des elektromagnetischen Feldes sind sind Quarks auch Quellen eines chromodynamischen Feldes, dem Feld der starken Wechselwirkung, welches ebenfalls ein Eichvektorfeld ist. Die Eichgruppe ist aber im Fall der starken Wechselwirkung die nicht-abelsche $SU(3)$ und nicht die $U(1)$ wie im Fall des elektromagnetischen Feldes. Die Quarks koppeln an dieses Feld über einen weiteren Freiheitsgrad, der als Farbe (*Colour*) bezeichnet wird; ein Quark wird also durch ein Tripel aus drei Farbkomponenten beschrieben. Das Analogon zu den Quanten des elektromagnetischen Feldes, den Photonen, sind die Quanten des chromodynamischen Feldes, die *Gluonen*.

Die experimentelle Bestätigung der QCD ist auf einen kleinen Energie Bereich, den der tief inelastischen Streuung, begrenzt. Dies ist darin begründet, daß die Anwendung der Störungstheorie auf die QCD nur für große Impulsüberträge möglich ist. Bei kleinen Abständen bzw. großen Impulsüberträgen verhalten sich Quarks "asymptotisch frei", d.h. die starke Koppelungskonstante α_s wird klein, wogegen die Stärke der Wechselwirkung bei großen Abständen so ansteigt, daß ein störungstheoretischer Zugang für Distanzen größer 1 fm nicht mehr sinnvoll ist. Dies entspricht auch der Beobachtung, daß Quarks "confined" sind, d.h. stets in gebundenen, farbneutralen Zuständen der hadronischen Materie, also als Baryonen und Mesonen, auftreten. Die Separation von Quarks erfordert nach der Confinement-Hypothese eine unendliche Menge an Energie, da die Wechselwirkung zwischen Quarks für große Abstände linear ansteigt.

Andererseits erwartet man, daß ein thermodynamisches System aus Quarks und Gluonen bei sehr hohen Temperaturen von Moden großer Impulse dominiert und die Wechselwirkung aufgrund der asymptotischen Freiheit immer schwächer wird. Dem entsprechend ergeben störungstheoretische Rechnungen im Hochtemperatur-Limes ein thermodynamisches Verhalten, das dem eines idealen Gases aus nicht wechselwirkenden Quarks und Gluonen nahekommt. Dies bedeutet aber, daß es einen Phasenübergang bei endlicher Temperatur geben müßte von der Confinement-Phase, in der unsere hadronische Welt liegt, zu einer Deconfinement-Phase mit einem *Quark-Gluon-Plasma*, in dem die Quarks auch als freie Zustände auftreten. Dieser Phasenübergang entzieht sich aber aus oben genannten Gründen einer störungstheoretischen Untersuchung.

Ein weiterer Aspekt der nicht-störungstheoretische Natur des QCD-Vakuums untermauert ist die Existenz von drei sehr leichten Mesonen, den Pionen. Man vermutet, daß diese Goldstone-Teilchen sind, welche durch spontane Brechung der chiralen Symmetrie der QCD durch das QCD-Vakuum entstehen. Das störungstheoretische Vakuum ist jedoch chiral symmetrisch. Daher erwartet man analog zu dem Deconfinement-Phasenübergang einen *chiralen Phasenübergang* von einer Phase mit

spontan gebrochener chiraler Symmetrie bei tiefen Temperaturen zu einer chiral symmetrischen Phase bei hohen Temperaturen.

Um ein Verständnis dieser fundamentalen Eigenschaften der starken Wechselwirkung zu erlangen, ist also ein nicht-störungstheoretischer Zugang zur QCD notwendig. Eine solche Methode ist in den siebziger Jahren von Kenneth Wilson entwickelt worden [1], sie beruht auf der Feynman'schen Pfadintegralformulierung. In der euklidischen Pfadintegralformulierung kann das Pfadintegral als Zustandssumme eines thermodynamischen Systems interpretiert werden, wobei die Temperatur der inversen zeitlichen Ausdehnung des Systems entspricht. Die Einführung eines diskreten Raum-Zeit-Gitters führt dabei zu einer Regularisierung des überabzählbar-unendlich dimensional Pfadintegrals zu einem endlich dimensional Integral, welches numerisch mit sogenannten *Monte-Carlo Methoden* berechnet werden kann.

Dieser Zugang, welcher als *Gittereichtheorie* bezeichnet wird, erlaubt die qualitative und quantitative Untersuchung der Temperaturabhängigkeit thermodynamischer Observablen, wie dem Druck und der Energiedichte, sowie die Bestimmung der kritischen Temperatur an dem der Deconfinement-Phasenübergang bzw. der chirale Phasenübergang geschieht. Thermodynamische Observable sind in der Gitterformulierung durch Erwartungswerte von Gitteroperatoren bezüglich der Boltzmann-Verteilung e^{-S} gegeben, wobei S die *Wirkung* des Systems ist.

Die Anwendbarkeit dieser nicht-störungstheoretischen Methoden ist mit der Entwicklung von leistungsstarken Computern eng verknüpft. In den achtziger Jahren waren diese Untersuchungen im wesentlichen auf die sogenannte *quenched Approximation* beschränkt, in der man den Einfluß dynamischer Quarks vernachlässigt, also ein reines Gluon-System betrachtet, was den numerischen Aufwand um ein vielfaches verringert. In den neunziger Jahren ist es durch die Entwicklung von massiv parallelen Rechnern möglich geworden, auch Monte-Carlo Simulationen mit dynamischen Fermionen durchzuführen.

Die Gitterregularisierung führt auf der anderen Seite aber zu systematischen Diskretisierungsfehlern, die auf den endlichen Gitterabstand a (*Cut-off*) zurückzuführen sind und die daher als *Cut-off-Effekte* bezeichnet werden. Diese Cut-off-Effekte sind für die Standard Formulierung der $SU(3)$ Gittereichtheorie und Standard Formulierung der sogenannten *staggered* Fermionen, die in dieser Arbeit betrachtet werden, von $\mathcal{O}(a^2)$. Im störungstheoretischen Hochtemperatur-Limes zeigen sich diese Cut-off-Effekte in Korrekturen von $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ zum idealen Gas Limes, wobei N_τ die Anzahl der Gitterpunkte in der Zeitrichtung eines 4-dimensionalen Gitters ist. Um Kontinuumsphysik zu extrahieren muß man daher zu immer kleinerem Gitterabstand gehen, was bei gleichbleibendem physikalischen Volumen des Systems mehr und mehr Gitterpunkte erfordert und daher einen enormen numerischen Aufwand mit sich bringt. Im Rahmen der reinen Eichtheorie ist eine solche Extrapolation zum Kontinuums-limes für die thermodynamische Zustandsgleichung zum ersten mal durchgeführt

worden [2]. Im Rahmen der vollen QCD, also mit Berücksichtigung dynamischer Fermionen, ist eine solche Vorgehensweise mit den heutigen Computer-Ressourcen praktisch nicht durchführbar, da der numerische Aufwand hier um ein vielfaches größer ist. Es besteht also die Notwendigkeit, die Cut-off-Effekte zu reduzieren, ohne die Zahl der Gitterpunkte zu vergrößern.

Eine Lösung dieses Problems sind sogenannte *verbesserte Wirkungen*. Die Diskretisierung einer Kontinuumtheorie ist nicht eindeutig vorgeschrieben, vielmehr gibt es viele Gitterformulierungen, die in dem Sinne äquivalent sind, daß die Gitter-Wirkung im *naiven Kontinuumlimites* ($a \rightarrow 0$) die Kontinuum-Lagrangedichte reproduziert. Diese Formulierungsfreiheit kann dazu genutzt werden, die endlichen Cut-off-Effekte von vornherein zu reduzieren. In den letzten Jahren sind verschiedene Methoden entwickelt worden, um verbesserte Wirkungen zu konstruieren. Diese basieren entweder auf störungstheoretischen Methoden oder auf der Renormierungsgruppentheorie nach Wilson [1].

Im Rahmen der reinen Eichtheorie haben störungstheoretisch tree-level-verbesserte sowie renormierungsgruppenverbesserte Wirkungen eine starke Reduzierung von Cut-off-Effekten in thermodynamischen Observablen gezeigt [3, 4]. Per Konstruktion reduzieren tree-level-verbesserte Wirkungen die führenden Cut-off-Korrekturen im Hochtemperatur-Limes. Sie scheinen jedoch auch Cut-off-Effekte bei endlicher Eichkoppelung g^2 , also endlicher Temperatur, deutlich zu reduzieren.

Eine tree-level-verbesserte staggered Fermionwirkung ist ebenfalls für eine Untersuchung der QCD Thermodynamik eingesetzt worden [5]. Hier zeigt sich wie für die tree-level-verbesserten Eichwirkungen eine starke Verbesserung des Hochtemperaturverhaltens. Im Fall der Standard staggered Fermionwirkung ist bekannt, daß diese ebenfalls zu großen Cut-off abhängigen Abweichungen von der Kontinuumstörungstheorie für thermodynamische Observable in Ordnung g^2 führt [6]. Es wäre also konsequent, auch die $\mathcal{O}(g^2 a^2)$ Korrekturen systematisch zu beheben. Andererseits hat aber eine kürzlich durchgeführte Klassifikation der Gitteroperatoren, die man dazu in der Fermionwirkung berücksichtigen müßte, gezeigt [7], daß dies eine große Zahl von zusätzlichen Termen erforderlich macht, unter anderem auch 4-Fermionoperatoren, die die Nutzung einer solche Wirkung für Monte-Carlo Simulationen praktisch unmöglich machen.

Diese Arbeit soll deshalb ein etwas moderateres Ziel haben. Es sollen staggered Fermionwirkungen konstruiert werden, die tree-level-verbessert sind und auf 1-loop-Ebene zumindest zu sehr kleinen Cut-off-Effekten in thermodynamischen Observablen führen. Dabei wird besonders auf die Praktikabilität dieser Wirkungen für Monte-Carlo Simulationen Wert gelegt, d.h. diese Wirkungen enthalten neben dem Term der Standard Wirkung nur einen weiteren Operator. Darüber hinaus sollen diese Wirkungen noch eine andere Art von Cut-off-Effekten verkleinern, die Brechung der Flavoursymmetrie in der Staggered Fermion-Formulierung. Dies wird durch die sogenannte Fat-Link-Verbesserung erreicht [8].

Anhand der Analyse der Cut-off-Effekte in 1-loop-Gitterstörungstheorie soll überprüft werden, wie die Wirkungsweise dieser Verbesserungen in Bezug auf thermodynamische Observable ist. Darüber hinaus wird die Flavoursymmetriebrechung für die verbesserten Wirkungen untersucht. Es soll der Frage nachgegangen werden, in wie weit diese beiden Arten der Verbesserungen unabhängig von einander sind, d.h. was der Einfluß der Fat-Link-Verbesserung auf das Hochtemperaturverhalten ist und umgekehrt wie sich die Tree-level-Verbesserung auf die Flavoursymmetrie auswirkt.

Der Aufbau dieser Arbeit ist wie folgt:

In Kapitel 1 wird zunächst eine kurze Einführung in die Standard Formulierung der QCD auf dem Gitter gegeben. Es sollen hier insbesondere die Eigenschaften der staggered Fermionen dargestellt werden, die für die weitere Diskussion wichtig sind. In Kapitel 2 werden verschiedene Methoden zur Reduktion von Cut-off-Effekten sowie deren Wirksamkeit in der QCD Thermodynamik an Hand der reinen Eichtheorie diskutiert. Hier wird unter anderem ein Vergleich der Cut-off-Effekte im Hochtemperatur-Limes für störungstheoretisch und renormierungsgruppenverbesserte Eichwirkungen gezogen.

Der erste Teil von Kapitel 3 geht genauer auf die Cut-off-Korrekturen der staggered Fermion-Formulierung und auf die Klassifikation der zu einer $\mathcal{O}(a^2 g^{2n})$ verbesserten Fermionwirkung beitragenden Operatoren ein. Im zweiten Teil wird die Methode der Fat-Link-Verbesserung der Flavoursymmetrie diskutiert.

In Kapitel 4 wird schließlich eine Klasse von staggered Fermionwirkungen definiert. Die Koeffizienten dieser Wirkungen werden so bestimmt, daß die Rotationssymmetrie des Fermionpropagators in Tree-level und in 1-loop-Ordnung verbessert ist. Anschließend werden die Resultate der Berechnung der fermionischen Beiträge zur freien Energiedichte im Hochtemperatur-Limes für die verschiedenen Wirkungen aus einer störungstheoretischen 1-loop-Rechnung präsentiert. Weiterhin wird die Flavoursymmetrie für diese verbesserten Wirkungen anhand von Messungen des Pion-Splittings auf quenched Konfigurationen analysiert.

In den Anhängen werden die expliziten Resultate und weitere Details der störungstheoretischen Rechnungen sowie Resultate der Messungen des Mesonspektrums gegeben.

Kapitel 1

Die Gitterformulierung der QCD

Die QCD-Lagrangedichte

In diesem Kapitel soll die Gitterformulierung der QCD, die den Rahmen dieser Arbeit bildet, in Grundzügen dargestellt werden. Ausführliche Einführungen in Gittereichtheorien finden sich z.B. in [9] und [10]. Zunächst geht man von der QCD-Lagrangedichte \mathcal{L}_{QCD} aus. Diese enthält einen gluonischen Teil \mathcal{L}_G , welcher die Selbstwechselwirkung der Eichbosonen beschreibt, zum anderen den fermionischen Teil \mathcal{L}_F , welcher die Wechselwirkung der Quarks mittels der Gluonen beschreibt sowie einen Massenterm enthält. Für n_f Quark-Flavour und die Eichgruppe $SU(N_c)$, also $(N_c^2 - 1)$ masselose Eichfelder, lautet die QCD-Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD}(x) = \mathcal{L}_G + \mathcal{L}_F \quad , \quad (1.1)$$

$$\mathcal{L}_G(x) = -\frac{1}{4} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) \quad , \quad (1.2)$$

$$\mathcal{L}_F(x) = \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\Psi}_f^\alpha(x) (\not{D}_{\alpha\beta} - m_f \delta_{\alpha\beta}) \Psi_f^\beta(x) \quad . \quad (1.3)$$

Dabei ist die kovariante Ableitung definiert durch

$$\not{D} \equiv i(\partial_\mu + igA_\mu)\gamma^\mu \quad , \quad (1.4)$$

$$A_\mu = \sum_{a=1}^{N_c^2-1} A_\mu^a T_a \quad , \quad (1.5)$$

wobei T_a die Erzeugenden der Eichgruppe $SU(N_c)$ bezeichnen. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^a$, der auch als kovariante Rotation bezeichnet wird, ist gegeben durch

$$F_{\mu\nu}^a \equiv \partial_\mu A_\nu^a - \partial_\nu A_\mu^a - gf_{abc} A_\mu^b A_\nu^c \quad , \quad (1.6)$$

mit den Strukturkonstanten f_{abc} der $SU(N_c)$. In der realen Welt findet man 6 Quark-Flavour (*up, down, strange, charm, bottom* und *top*), sowie die nicht-abelsche Eichgruppe $SU(3)$. Aus Gründen der Allgemeinheit sollen aber weiterhin n_f Flavour und N_c Farben betrachtet werden.

Symmetrien der QCD

Bevor wir zur Gitterformulierung der QCD kommen, sollen die Symmetrien der QCD-Lagrangedichte diskutiert werden. Diese können in der Gitterformulierung in unterschiedlichem Umfang realisiert werden.

Zunächst ist die QCD-Lagrangedichte aufgrund ihrer kovarianten Formulierung invariant unter Poincaré-Transformationen. Obwohl diese Symmetrie Grundlage jeder relativistischen Quantenfeldtheorie ist, spielt sie jedoch für die Gitterformulierung, in der sie auf eine diskrete Symmetrie reduziert wird, eine eher untergeordnete Rolle.

Desweiteren ist die QCD als Eichtheorie formuliert mit der nicht-abelschen Eichgruppe $SU(N_c)$, das heißt unter lokalen Transformationen

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\longrightarrow G(x)\Psi(x) , \\ \bar{\Psi}(x) &\longrightarrow \bar{\Psi}(x)G^\dagger(x) , \\ A_\mu(x) &\longrightarrow G(x)A_\mu(x)G^\dagger(x) - g^{-1}(\partial_\mu G(x))G^\dagger(x) ,\end{aligned}\tag{1.7}$$

mit $G(x) \in SU(N_c)$, ist die Lagrangedichte invariant. Diese Symmetrie spielt eine zentrale Rolle für das Confinement, d.h. das ausschließliche Auftreten von Singlett-Bindungszuständen, und den Deconfinement-Phasenübergang bei endlicher Temperatur. Daher ist es wichtig, diese Eichsymmetrie auch in der Gitterformulierung zu erhalten.

Neben der lokalen Eichsymmetrie, welche sich im Farbraum abspielt, besitzt die QCD-Lagrangedichte im masselosen Fall eine globale $U_V(1) \otimes SU_V(n_f) \otimes U_A(1) \otimes SU_A(n_f)$ Symmetrie, die chirale Symmetrie, welche im Flavourraum liegt. Das heißt \mathcal{L}_{QCD} ist invariant unter den globalen Transformationen

$$\begin{aligned}\Psi(x) &\longrightarrow \exp(-i\theta_V \mathbb{1} \otimes \mathbb{1})\Psi(x) , \\ \Psi(x) &\longrightarrow \exp(-i\theta_a \mathbb{1} \otimes T_a)\Psi(x) , a = 1, \dots, n_f^2 - 1 , \\ \Psi(x) &\longrightarrow \exp(-i\theta_A \gamma_5 \otimes \mathbb{1})\Psi(x) , \\ \Psi(x) &\longrightarrow \exp(-i\theta_{5,a} \gamma_5 \otimes T_a)\Psi(x) , a = 1, \dots, n_f^2 - 1 ,\end{aligned}$$

dabei wirkt der erste Operator der Tensorprodukte auf die Dirac-Komponenten und der zweite auf die Flavour-Komponenten. Die T_a bezeichnen die Erzeugenden der $SU(n_f)$. Die $\bar{\Psi}$ -Felder werden analog mit den hermitesch konjugierten Operatoren transformiert.

Die $U_V(1)$ ist auch im allgemeinsten nicht-masselosen, nicht-massenentarteten Fall

vorhanden, sie führt zu Baryonenzahl-Erhaltung.

Die $SU_V(n_f)$ ist die verallgemeinerte Iso-Spin-Symmetriegruppe für massenentartete Quarkflavour. Betrachtet man die Massen der realen Quarkflavour, so findet man, daß diese Iso-Spin-Symmetrie auf die beiden leichten, in etwa gleich schweren u und d Quarks reduziert ist.

Die $SU_A(n_f)$ liegt nur im masselosen Fall vor. Aus der Invarianz von Zuständen unter diesen chiralen Transformationen folgt die Massenentartung von Paritätspartnern. Zwar sind die physikalischen Quarkmassen nicht Null, aber dennoch müßte diese Entartung näherungsweise für die leichten Quarks (u, d) zu beobachten sein, was nicht der Fall ist. Vielmehr scheint eine spontane Brechung dieser axialen $SU(2)$ Symmetrie vorhanden zu sein. Als Indiz dafür kann die Existenz dreier sehr leichter Pionen (π_0, π_+, π_-) betrachtet werden. Diese interpretiert man als Goldstone-Bosonen entsprechend der drei Generatoren der spontan gebrochenen $SU_A(2)$.

Die $U_A(1)$ Flavour-Singlett-Symmetrie ist durch Quantenkorrekturen explizit gebrochen, was als axiale Anomalie bekannt ist.

Die Realisierung insbesondere der chiralen $SU_A(n_f)$ Symmetrie auf dem Gitter ist die Voraussetzung für die Untersuchung eines chiralen Phasenübergangs bei endlicher Temperatur zu einer Hochtemperaturphase mit restaurierter chiraler Symmetrie.

Gitterformulierung bei endlicher Temperatur

Der Übergang zur Gitterformulierung der QCD bei endlicher Temperatur geschieht im Formalismus imaginärer Zeit, das heißt man macht die Substitution $x_0 \rightarrow -ix_4$. Dadurch wird aus der Minkowski-Metrik die Euklidische Metrik und es ergibt sich die euklidische Lagrangedichte

$$\mathcal{L}_{QCD}^{(E)}(x) = \frac{1}{4} \sum_{a=1}^{N_c^2-1} F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) + \sum_{f=1}^{n_f} \bar{\Psi}_f^\alpha(x) (\mathcal{D}_{\alpha\beta}^E + m_f \delta_{\alpha\beta}) \Psi_f^\beta(x) \quad , \quad (1.8)$$

mit $\mathcal{D} \equiv (\partial^\mu + igA^\mu) \gamma_\mu^E$, wobei γ_μ^E die Euklidischen Dirac-Matrizen sind, definiert durch $\gamma_4^E = \gamma_0$, $\gamma_k^E = -i\gamma_k$, $k = 1, 2, 3$. Diese erfüllen die Relation

$$\{\gamma_\mu^E, \gamma_\nu^E\} = 2\delta_{\mu\nu} \quad . \quad (1.9)$$

Da Verwechslungen auszuschließen sind, wird der Index E im folgenden weggelassen.

Damit erhält man die kanonische Zustandssumme bei Temperatur T

$$Z(T, V) = \int dA d\bar{\Psi} d\Psi \exp(-S[A, \bar{\Psi}, \Psi]) \quad , \quad (1.10)$$

mit der Wirkung

$$S[A, \bar{\Psi}, \Psi] = \int_V d^3x \int_0^{1/T} d\tau \mathcal{L}[A, \bar{\Psi}, \Psi] \quad . \quad (1.11)$$

Man diskretisiert nun das Raum-Zeit-Kontinuum durch ein vierdimensionales Gitter mit Gitterabstand a . Im Folgenden betrachten wir im allgemeinen ein Gitter mit N_σ Punkten in den Raumrichtungen und N_τ Punkten in der Zeitrichtung. Wie oben schon erwähnt geht durch die Gitterregularisierung die volle Poincaré-Invarianz verloren, sie wird auf eine diskrete Gitter-Symmetrie reduziert.

1.1 Die naive Fermionwirkung

Die freie naive Fermionwirkung

Auf dem 4-dimensionalen, hyperkubischen $N_\sigma^3 \times N_\tau$ Gitter kann man nun Grassmannwertige Fermionfelder $\psi(n)$ am Punkt $n = (n_1, \dots, n_4)$ definieren, die periodischen Randbedingungen in den Raumrichtungen und antiperiodischen Randbedingungen in der Zeitrichtung genügen. Betrachten wir zunächst eine Diskretisierung des fermionischen Teils der Wirkung 1.11 mit diesen Gitter-Fermionen im freien Fall, das heißt unter Vernachlässigung der Eichwechselwirkung ($A_\mu = 0$). Dazu ersetzt man das Integral $\int d^4x$ durch die Summe $a^4 \sum_n$ und die Ableitungen durch endliche Differenzenquotienten,

$$S_F^{(naiv)} = \sum_{f=1}^{n_f} \sum_{k,n} \bar{\psi}_\alpha^f(k) M_f^{\alpha\beta}(k, n) \psi_\beta^f(n), \quad (1.12)$$

mit der Fermionmatrix

$$M_f^{\alpha\beta}(k, n) = m_f \delta^{\alpha\beta} \delta(k, n) + \frac{1}{2a} \sum_\mu (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} [\delta(k + \hat{\mu}, n) - \delta(k - \hat{\mu}, n)], \quad (1.13)$$

wobei $\hat{\mu}$ einen Einheitsvektor in μ -Richtung bezeichnet. Im Limes $a \rightarrow 0$ reproduziert dies die freie Kontinuumwirkung. Warum diese Formulierung dennoch als "naiv" bezeichnet wird, soll am Ende dieses Abschnitts beschrieben werden.

Die im vorhergehenden Abschnitt diskutierten Symmetrien sind zentrale Eigenschaften der QCD. Es stellt sich also die Frage, in wie weit diese Symmetrien sich in die Gitterformulierung übertragen lassen. Die Struktur der naiven Fermionwirkung 1.13 im Dirac- und Flavour-Raum ist die gleiche wie die der Kontinuum-Wirkung 1.11. Daher besitzt sie ebenfalls die globale chirale $U_V(n_f) \otimes U_A(n_f)$ Symmetrie.

Die naive Fermionwirkung mit Eichfeldern

Die lokale $SU(N_c)$ Eichsymmetrie der Gitter-Wirkung steht in engem Zusammenhang mit der Diskretisierung der Eichfelder. Führt man nämlich lokale Eichtransformationen aus, so transformieren sich die bilinearen Terme, z.B. $\bar{\psi}(k)\psi(k + \hat{\mu})$, in der Wirkung wie

$$\bar{\psi}(k)\psi(k + \hat{\mu}) \longrightarrow \bar{\psi}(k)G^\dagger(k)G(k + \hat{\mu})\psi(k + \hat{\mu}) . \quad (1.14)$$

Um die $SU(N_c)$ Eichsymmetrie auf das Gitter zu übertragen ist es also notwendig, einen Term einzuführen, der zwei benachbarte Gitterpunkte über die Eichfelder A verbindet und somit die Eichvariation in 1.14 kompensiert. Dies geschieht durch die sogenannten Linkvariablen U , die als Paralleltransporter definiert werden

$$U_\mu(n) \equiv \exp \left(ig \int_{na}^{(n+\hat{\mu})a} dx A_\mu(x) \right) . \quad (1.15)$$

Diese Linkvariablen selbst liegen in der Gruppe $SU(N_c)$, sie transformieren sich unter Eichtransformationen wie

$$U_\mu(k) \longrightarrow G(k)U_\mu(k)G^\dagger(k + \hat{\mu}) , \quad (1.16)$$

sodaß sich eichinvariante bilineare Terme bilden lassen: $\bar{\psi}(k)U_\mu(k)\psi(k + \hat{\mu})$. Die Fermionmatrix für die eichinvariante naive Fermionwirkung lautet also

$$\begin{aligned} M_f^{\alpha\beta}(k, n) &= m_f \delta^{\alpha\beta} \delta(k, n) \\ &+ \frac{1}{2a} \sum_\mu (\gamma_\mu)^{\alpha\beta} [U_\mu(k)\delta(k + \hat{\mu}, n) - U_\mu^\dagger(k - \hat{\mu})\delta(k - \hat{\mu}, n)] , \end{aligned} \quad (1.17)$$

Naiver Kontinuum-Limes

Damit die so definierte naive Gitter-Fermionwirkung auch eine Diskretisierung der Kontinuum-Fermionwirkung ist, ist es notwendig, daß sie im naiven Kontinuum-Limes ($a \rightarrow 0$) gegen die QCD-Kontinuum-Wirkung konvergiert. Um dies zu zeigen entwickelt man die Wirkung in Ordnungen des Gitterabstands a . Dazu betrachtet man die Definition der Linkvariablen $U_\mu(x)$ als Paralleltransporter zwischen den Punkten n und $n + \hat{\mu}$ (1.15), welche eine Verbindung zwischen den Gittereichfeldern U_μ und den Kontinuumeichfeldern A^μ herstellt.

Die Entwicklung der Linkvariablen nach a liefert damit

$$U_\mu(n) = \mathbb{1} + iga \left[A_\mu(na) + \frac{1}{2}a\partial_\mu A_\mu(na) + \frac{1}{6}a^2\partial_\mu^2 A_\mu(na) + \mathcal{O}(a^3) \right] + \mathcal{O}(a^2g^2) . \quad (1.18)$$

Setzt man diese Entwicklung in die naive Fermionwirkung ein, so erhält man

$$\begin{aligned}
S_f^{(naiv)} &= a^4 \sum_n \sum_f \left[\sum_\mu \gamma_\mu^{\alpha\beta} \bar{\Psi}_\alpha^f(na) \frac{1}{2a} \left(\Psi_\beta^f((n + \hat{\mu})a) - \Psi_\beta^f((n - \hat{\mu})a) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + iga \left(A_\mu((n + \hat{\mu})a) \Psi_\beta^f((n + \hat{\mu})a) + A_\mu((n - \hat{\mu})a) \Psi_\beta^f((n - \hat{\mu})a) \right) \right) \right] \\
&\quad + m_f \bar{\Psi}_\alpha^f(na) \Psi_\beta^f(na) \delta^{\alpha\beta} + \mathcal{O}(a^5) \\
&\xrightarrow{a \rightarrow 0} \int dx \sum_f \left[\sum_\mu \gamma_\mu^{\alpha\beta} \bar{\Psi}_\alpha^f(x) \left(\partial^\mu + igA^\mu(x) \right) \Psi_\beta^f(x) \right] + m_f \bar{\Psi}_\alpha^f(x) \Psi_\beta^f(x) \delta^{\alpha\beta}
\end{aligned}$$

Im naiven Kontinuumlimes wird also die Kontinuum-Fermionwirkung reproduziert.

Das Fermion-Doppeler-Problem

Im Folgenden soll erläutert werden, warum die oben beschriebene Diskretisierung der Fermionwirkung trotz ihrer Symmetrieeigenschaften ungeeignet ist.

Dazu betrachten wir die freie naive Wirkung für $n_f=1$ im Impulsraum indem wir folgende Impulsraumdarstellung der Fermionfelder im thermodynamischen Limes ($N_\sigma \rightarrow \infty, N_\tau \rightarrow \infty$) betrachten:

$$\begin{aligned}
\Psi(na) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{ipna} \Psi(p) \quad , \\
\bar{\Psi}(na) &= \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} e^{-ipna} \bar{\Psi}(p) \quad .
\end{aligned} \tag{1.19}$$

Setzt man dies in die Wirkung ein, so erhält man

$$S_F^{(naiv)} = \int_{-\pi/a}^{\pi/a} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4} \bar{\Psi}(p) \left[\sum_\mu i \gamma_\mu \frac{1}{a} \sin(p_\mu a) + m \right] \Psi(p) \quad . \tag{1.20}$$

Daraus ergibt sich der freie Propagator im Impulsraum

$$\langle \bar{\psi}_\alpha(p) \psi_\beta(q) \rangle_0 = \frac{\left(i \sum_\mu \gamma_\mu \tilde{p}_\mu - m \right)_{\alpha,\beta}}{\sum_\mu \tilde{p}_\mu^2(p) + m^2} \delta_{p,q} \quad , \text{ mit} \tag{1.21}$$

$$\tilde{p}_\mu \equiv \frac{1}{a} \sin(p_\mu a) \quad . \tag{1.22}$$

Der Gitter-Impuls \tilde{p}_μ ist in Abbildung 1.1 Dargestellt, er hat nicht nur bei $p_\mu = 0$ sondern auch am Rand der Brillouin-Zone bei $p_\mu = \pi/a$ eine Nullstelle. Dadurch erhält der Propagator neben dem Pol bei $p = (0, 0, 0, 0)$ 15 weitere Pole bei $p = (\pi/a, 0, 0, 0), (0, \pi/a, 0, 0), \dots, (\pi/a, \pi/a, \pi/a, \pi/a)$. In jeder Dimension findet also

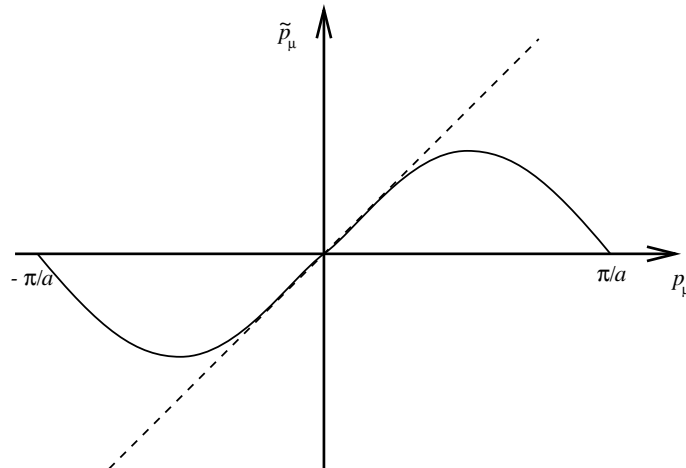


Abbildung 1.1: Plot von $\sin(p_\mu a)/a$ gegen p_μ in der Brillouin-Zone. Die Diagonale ist durch $\tilde{p}_\mu = p_\mu$ bestimmt. Der Kontinuum-Limes wird durch die Impulse in der Nähe von $p_\mu = 0$ und $p_\mu = \pm\pi/a$ bestimmt.

eine Verdoppelung der Teilchenzahl statt. Diese zusätzlichen Fermionen werden als Doppeler bezeichnet. Die naive Fermionwirkung ist also in dem Sinne ein “naiver” Zugang, als daß sie für $n_f=1$ 16 massenentartete Sorten von Quarks beschreibt. Für n_f naive Flavour in d Dimensionen wären es entsprechend $2^d \cdot n_f$ physikalische Quark-Sorten.

Um die Kontinuum-QCD zu beschreiben, müssen also diese zusätzlichen Quark-Sorten eliminiert oder zumindest reduziert werden. In den Abschnitten 1.3 und 1.4 werden zwei Möglichkeiten beschrieben, das Doppeler-Problem zu lösen, wenn auch unter Inkaufnahme anderer Einschränkungen.

1.2 Die Standard Wilson-Eichwirkung

In diesem Abschnitt soll die Standard Wilson Formulierung der Eichwirkung auf dem Gitter diskutiert werden. Wie im vorhergehenden Abschnitt beschrieben, gelingt es eine zentrale Eigenschaft der QCD, die Invarianz unter lokalen $SU(N_c)$ Eichtransformationen in dem fermionischen Teil der Wirkung durch Einführung der Linkvariablen auf das Gitter zu übertragen.

Mit diesen Linkvariablen ist es nun auch möglich, den Eichteil der Wirkung zu diskretisieren. Sehr konstruktiv ist dabei die Überlegung, daß gluonische, eichinvariante Operatoren auf dem Gitter durch geordnete Produkte von Linkvariablen entlang geschlossener Wege gegeben sind. Die einfachste Möglichkeit dafür ist die sogenannte

Plaquette, die das geordnete Produkt der Linkvariablen entlang der Kanten einer elementaren Gitterzelle ist:

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \hline \end{array} (x) = P_{\mu\nu}(x) = U_\mu(x)U_\nu(x + \hat{\mu})U_\mu^\dagger(x + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(x) . \quad (1.23)$$

Die hier eingeführte graphische Notation soll auch im Folgenden Verwendung finden. Kantenlinien mit Pfeil in positive Richtung bezeichnen dabei die Linkvariable an dieser Kante, solche mit Pfeil in negativer Richtung das hermitesch Konjugierte der entsprechenden Linkvariable.

Damit definiert man die Standard Wilson-Eichwirkung auf dem Gitter, die wir einer verallgemeinerten Notation folgend mit $S_G^{(1,1)}$ entsprechend der 1×1 Ausdehnung der Plaquette bezeichnen:

$$S_G^{(1,1)} = \beta \sum_x \sum_{\mu < \nu} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re Tr} \begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \hline \end{array} \mu\nu (x) \right) , \quad (1.24)$$

wobei die Spur im Farbraum genommen wird und die Kopplung durch $\beta = 2N_c/g^2$ definiert ist.

Naiver Kontinuum-Limes

Betrachten wir wieder das Verhalten der Gitterwirkung im Limes $a \rightarrow 0$. Dazu benutzt man wieder die Definition der Linkvariablen als Paralleltransporter $U_\mu(x) = \exp(iga \int_x^{x+a\hat{\mu}} d\tau A_\mu(\tau))$. Benutzt man nun die Baker-Hausdorff-Formel, $e^A e^B = e^{A+B+1/2[A,B]+\dots}$, und entwickelt die A -Felder um den Plaquette-Mittelpunkt, so findet man

$$\begin{array}{|c|} \hline \begin{array}{c} \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \\ \leftarrow \end{array} \\ \hline \end{array} (x) = \exp \{ iga^2 (\partial_\mu A_\nu(x) - \partial_\nu A_\mu(x) + ig[A_\mu(x), A_\nu(x)]) + \mathcal{O}(a^3) \} . \quad (1.25)$$

Entwickelt man die Exponentialfunktion und benutzt die Relation $2\text{Tr}(T_a T_b) = \delta_{ab}$ für die Generatoren T_a der $SU(N_c)$, dann ergibt sich

$$\begin{aligned} S_G^{(1,1)} &= a^4 \frac{1}{4} \sum_x \sum_{\mu, \nu} \text{Tr} \{ \partial_\mu A_\nu^a(x) - \partial_\nu A_\mu^a(x) - gf_{abc} A_\mu^b(x) A_\nu^c(x) \}^2 + \mathcal{O}(a^6) \\ &\xrightarrow{a \rightarrow 0} \frac{1}{4} \int dx F_{\mu\nu}^a(x) F_a^{\mu\nu}(x) . \end{aligned}$$

Die Wilson-Eichwirkung liefert also den korrekten naiven Kontinuum-Limes. Bei endlichem Gitterabstand (Cut-off) a führt sie jedoch zu Abweichungen von $\mathcal{O}(a^2)$. Dieser systematische Fehler ist dafür verantwortlich, daß man auch in Gitterobservablen entsprechende Abweichungen findet. Auf verschiedene Methoden, diese Cut-off-Effekte im Eichsektor zu reduzieren, wird in Kapitel 2 ausführlich eingegangen.

1.3 Die Wilson-Fermionwirkung

Wie im vorhergehenden Abschnitt gezeigt, führt die naive Formulierung der Fermion Wirkung auf dem Gitter zu einer Verdoppelung der Flavour-Freiheitsgrade für jede Dimension, sodaß auf einem $N_\sigma^3 \times N_\tau$ Gitter 16 massenentartete Quark-Flavour existieren. Man nutzt im wesentlichen zwei unterschiedliche Ansätze, um dieses Problem zu umgehen.

Die erste Möglichkeit, die auf K. Wilson zurückgeht, besteht darin, einen zusätzlichen Term, den sogenannten Wilson-Term, zur naiven Wirkung zu addieren, der im naiven Kontinuum-Limes verschwindet:

$$S_F^{(W)} = S_F^{(naiv)} - ar/2 a^4 \sum_{x,y} \bar{\psi}(x) \square(x,y) \psi(y), \quad \text{mit} \quad (1.26)$$

$$\square(x,y) \equiv \frac{1}{a^2} \sum_{\mu} \delta(x + \hat{\mu}, y) + \delta(x - \hat{\mu}, y) - 2\delta(x, y) \quad (1.27)$$

Dieser Term führt dazu, daß bis auf $p = (0,0,0,0)$ alle Nullstellen des inversen Fermion-Propagators angehoben werden und somit die Ursache des Doppeler-Problems beseitigt wird. Diese sogenannte *Wilson-Wirkung* hat jedoch den Nachteil, daß der Wilson-Term die chirale Symmetrie auf einem endlichen Gitter auch im masselosen Fall explizit und vollständig bricht. Daher führt sie zu erheblichen Komplikationen bei der Analyse des chiralen Phasenübergangs in Monte-Carlo Simulationen bei endlicher Temperatur.

1.4 Die Kogut-Susskind Fermionwirkung

Die zweite Möglichkeit ist die sogenannte *staggered* oder *Kogut-Susskind* Fermionwirkung [11]. Diese Fermionwirkung sowie verbesserte Versionen stehen im Zentrum dieser Arbeit. In diesem Abschnitt werden zunächst die konzeptionellen Grundsätze dargestellt bevor in den Kapiteln 3 und 4 auf Verbesserungen eingegangen wird.

Anders als im Fall der Wilson-Wirkung ist im Fall der staggered Fermionen die Strategie zur Behebung des Doppeler-Problems nicht die Beseitigung überzähliger Pole im Propagator, sondern eine Reduzierung der Fermion-Freiheitsgrade durch Spin-Diagonalisierung der Wirkung. Zunächst wird dadurch vermieden, einen die chirale Symmetrie brechenden Term einzuführen.

Die freie Kogut-Susskind Wirkung

Betrachten wir zunächst die freie naive Fermionwirkung, so erreicht man eine Spin-Diagonalisierung durch eine lokale Transformation, Λ , der Fermionfelder

$$\psi(x) \rightarrow \Lambda(x)\psi(x) \quad , \quad (1.28)$$

$$\bar{\psi}(x) \rightarrow \bar{\psi}(x)\Lambda^\dagger(x) \quad , \quad (1.29)$$

derart, daß

$$\Lambda^\dagger(x)\gamma_\mu\Lambda(x+\hat{\mu}) = \eta_\mu(x) \mathbb{1} \quad . \quad (1.30)$$

Man findet, daß $\Lambda(x) = \gamma_1^{x_1}\gamma_2^{x_2}\gamma_3^{x_3}\gamma_4^{x_4}$ zu einer solchen Diagonalisierung führt, wobei die Phasen-Faktoren $\eta_\mu(x) = (-1)^{x_1+\dots+x_\mu-1}$ sind.

Mit den transformierten Fermionfeldern nimmt die freie Wirkung folgende Form an:

$$S_F = \frac{1}{2}a^4 \sum_{x,\mu,\alpha} \eta_\mu(x) \frac{1}{a} \bar{\psi}_\alpha(x) (\psi_\alpha(x+\hat{\mu}) - \psi_\alpha(x-\hat{\mu})) + m a^4 \sum_{x,\alpha} \bar{\psi}_\alpha(x) \psi_\alpha(x) \quad (1.31)$$

Man sieht nun, daß die Dirac-Komponenten des transformierten Feldes entkoppelt sind; sie sind von Flavour-Indizes nicht mehr zu unterscheidenen.

Die Idee, die der staggered Fermion Formulierung zugrunde liegt, ist nun, die Fermion-Freiheitsgrade zu reduzieren, indem man nur eine der entkoppelten Dirac-Komponenten berücksichtigt. Daher ersetzt man die Fermionfelder durch ein ein-komponentiges Feld χ . Die staggered Fermionwirkung ist somit definiert als

$$S_F^{(KS)} = \frac{1}{2}a^4 \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) \frac{1}{a} \bar{\chi}(x) (\chi(x+\hat{\mu}) - \chi(x-\hat{\mu})) + m a^4 \sum_x \bar{\chi}(x) \chi(x) \quad . \quad (1.32)$$

Reduzierte chirale Symmetrie

Wie oben erwähnt ist die chirale $U_V(n_f) \otimes U_A(n_f)$ Symmetrie in dieser Formulierung nicht vollständig gebrochen. Betrachten wir die folgenden Transformationen

$$\begin{aligned} \chi(x) &\longrightarrow \chi'(x) = \alpha_o \chi(x), & x \text{ ungerade} \quad , \\ \chi(x) &\longrightarrow \chi'(x) = \alpha_e \chi(x), & x \text{ gerade} \quad , \\ \bar{\chi}(x) &\longrightarrow \bar{\chi}'(x) = \alpha_e^\dagger \bar{\chi}(x), & x \text{ ungerade} \quad , \\ \bar{\chi}(x) &\longrightarrow \bar{\chi}'(x) = \alpha_o^\dagger \bar{\chi}(x), & x \text{ gerade} \quad , \end{aligned}$$

wobei $\alpha_o, \alpha_e \in U(1)$ und x ungerade bzw. gerade, wenn $|x| = \sum_{i=1}^4 x_i$ ungerade bzw. gerade. Unter dieser Transformation wird aus der Kogut-Susskind Wirkung 1.32:

$$\begin{aligned} S_F^{(KS)} &\longrightarrow \frac{1}{2}a^4 \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) \frac{1}{a} \bar{\chi}'(x) (\chi'(x + \hat{\mu}) - \chi'(x - \hat{\mu})) + m a^4 \sum_x \bar{\chi}'(x) \chi'(x) \\ &= \frac{1}{2}a^4 \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) \frac{1}{a} \bar{\chi}(x) (\chi(x + \hat{\mu}) - \chi(x - \hat{\mu})) + m a^4 \sum_x \bar{\chi}(x) \alpha_e^\dagger \alpha_o \chi(x) . \end{aligned}$$

Der kinetische Term ist also invariant, wogegen der Massenterm nur für $\alpha_o = \alpha_e$ invariant ist. Es liegt also im masselosen Fall eine reduzierte chirale $U_o(1) \otimes U_e(1)$ Symmetrie vor, die für $m \neq 0$ auf die diagonale Untergruppe eingeschränkt ist.

Flavourgehalt der staggered Fermionwirkung

Wie im folgenden erläutert wird, läßt sich diese Viertelung der Freiheitsgrade so interpretieren, daß die 16 Flavour der naiven Fermion Wirkung nun auf 4 Quark-Flavour reduziert sind, deren 16 Komponenten auf die 2^4 Ecken eines Hyperkubus verteilt sind. Diese Interpretation geht auf H. Kluberg-Stern *et al.* zurück [12].

Dazu führt man Koordinaten ein, die die Hyperkuben-Struktur berücksichtigen. Ist x der Koordinatenvektor eines Gitterpunktes, $x_1, \dots, x_4 = 0, 1, \dots, N_\sigma - 1$, so läßt sich dieser als Summe der Koordinate eines Hyperkubus y , mit $y_1, \dots, y_4 = 0, 2, \dots, N_\sigma - 1$, und der relativen Position innerhalb des Hyperkubus ξ , mit $\xi_1, \dots, \xi_4 = 0, 1$, darstellen. Mit $x = y + \xi$ lassen sich somit die Felder $\chi(x)$ umindizieren

$$\chi_\xi(y) \equiv \frac{1}{4} \chi(y + \xi) . \quad (1.33)$$

Aus den 16 χ -Feldern eines Hyperkubus, lassen sich nun wieder die Dirac- und Flavour-Komponenten eines Quarkfeldes $q(y)$ linear kombinieren

$$q_\alpha^f(y) \equiv \frac{1}{2} \sum_\xi (\gamma^\xi)_{\alpha f} \chi_\xi(y) , \quad (1.34)$$

$$\bar{q}_\alpha^f(y) \equiv \frac{1}{2} \sum_\xi \bar{\chi}_\xi(y) (\gamma^{\xi^\dagger})_{f\alpha} , \quad (1.35)$$

mit $\gamma^\xi \equiv \gamma_1^{\xi_1} \gamma_2^{\xi_2} \gamma_3^{\xi_3} \gamma_4^{\xi_4}$. Dabei ist α der Dirac-Index und f der Flavour-Index. Nach einigen algebraischen Umformungen kann man die Kogut-Susskind Wirkung in diesen Quarkfeldern ausdrücken:

$$S_F^{(KS)} = \sum_y (2a)^4 \bar{q}(y) \left[\sum_\mu [(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1}) \partial_\mu + a(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5}) \square_\mu] + m(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) \right] q(y) . \quad (1.36)$$

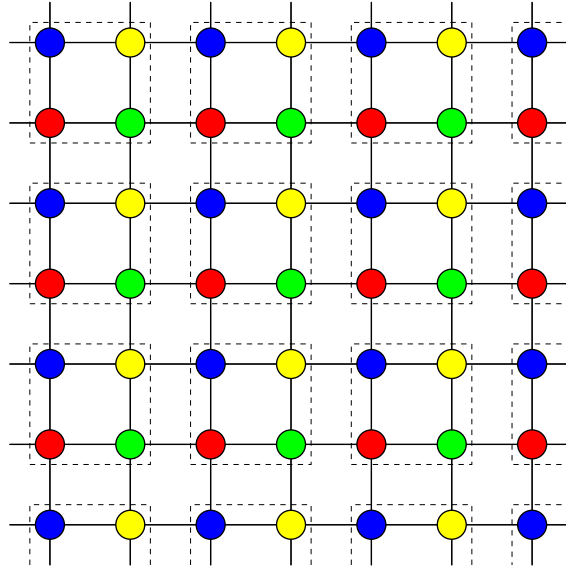


Abbildung 1.2: Verteilung der Dirac- und Flavour-Komponenten der staggered Fermionwirkung auf die Gitterplätze am Beispiel eines 2-dimensionalen Gitters.

Das Tensorprodukt ist so definiert, daß der erste Operator auf die Dirac-Komponenten und der zweite auf die Flavour-Komponenten wirkt, also $\bar{q}(y)(A \otimes B)q(y) \equiv \bar{q}_\alpha^f A^{\alpha\beta} B_{fg} q_\beta^g$. Die Differentialoperatoren wirken dabei auf dem zu Hyperkuben geblockten Gitter, also $\partial_\mu f(y) \equiv \frac{1}{4a}(f(y + 2\hat{\mu}) - f(y - 2\hat{\mu}))$ und $\square_\mu f(y) \equiv \frac{1}{4a^2}(f(y + 2\hat{\mu}) - 2f(y) + f(y - 2\hat{\mu}))$. Weiter sind die Matrizen t durch die entsprechenden transponierten γ -Matrizen definiert, also $t_{\mu 5} \equiv t_\mu t_5 \equiv \gamma_\mu^\top \gamma_5^\top$.

Die staggered Fermion-Formulierung führt also zu 2^{d-2} massenentarteten Fermion-Flavourn, die auf die Ecken eines Hyperkubus verteilt sind. Dies entspricht effektiv einer Verdoppelung des Gitterabstands. Vergleicht man die freie Kogut-Susskind Wirkung in den neuen Quarkfeldern mit der freien Wilson-Wirkung so fällt auf, daß diese eine sehr ähnliche Struktur haben, sie unterscheiden sich nur in der Matrix-Struktur des Korrektur-Terms von der Ordnung a , welcher eine Diskretisierung der zweiten Ableitung ist.

Reduzierte chirale Symmetrie der Wirkung in den Quarkfeldern

Die oben für die χ -Felder gezeigte reduzierte chirale Symmetrie kann man auch für die neuen q -Felder zeigen. Der die Symmetrie reduzierende Term ist offensichtlich der Korrektur-Term proportional $\gamma_5 \otimes t_{\mu 5}$.

Dazu benötigt man Projektoren \mathbf{P}_o und \mathbf{P}_e , die auf die ungeraden bzw. geraden

Gitterpunkte projizieren:

$$\begin{aligned}\mathbf{P}_e &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} + \gamma_5 \otimes t_5) \ , \\ \mathbf{P}_o &\equiv \frac{1}{2}(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1} - \gamma_5 \otimes t_5) \ .\end{aligned}$$

Mit diesen Projektoren lassen sich Transformationen $\alpha_o, \alpha_e \in U(1)$ auf die q -Felder anwenden:

$$\begin{aligned}q(y) &\longrightarrow q'(y) = (\alpha_o \mathbf{P}_o + \alpha_e \mathbf{P}_e)q(y) \\ &= \frac{1}{2} [(\alpha_e + \alpha_o)(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})q(y) + (\alpha_e - \alpha_o)(\gamma_5 \otimes t_5)q(y)] \\ \bar{q}(y) &\longrightarrow \bar{q}'(y) = \bar{q}(y)(\mathbf{P}_o \alpha_e^\dagger + \mathbf{P}_e \alpha_o^\dagger) \\ &= \frac{1}{2} [\bar{q}(y)(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})(\alpha_e^\dagger + \alpha_o^\dagger) + \bar{q}(y)(\gamma_5 \otimes t_5)(\alpha_o^\dagger - \alpha_e^\dagger)]\end{aligned}$$

Es gibt zwei Fälle, in denen die Wirkung 1.36 invariant unter diesen Transformationen ist, für $\alpha_e = \alpha_o$ und $\alpha_e = -\alpha_o$. In diesen Fällen werden die obigen Transformationen auf jeweils einen der Operatoren $\mathbf{V} \equiv \mathbb{1} \otimes \mathbb{1}$ bzw. $\mathbf{A} \equiv \gamma_5 \otimes t_5$ reduziert. Die Invarianz des kinetischen Terms der Wirkung im allgemeinen Fall folgt nun daraus, daß \mathbf{V} mit $\gamma_5 \otimes t_{\mu 5}$ kommutiert bzw. \mathbf{A} mit $\gamma_5 \otimes t_{\mu 5}$ antikommutiert, für alle μ .

Im Fall $\alpha_e = \alpha_o$, also für die durch \mathbf{V} generierten Transformationen, ist auch der Massenterm invariant. \mathbf{V} ist der Generator der $U_V(1)$, diese Symmetrie entspricht also der Baryonen-Zahlerhaltung.

Im Fall $\alpha_e = -\alpha_o$, also für die durch \mathbf{A} generierten Transformationen, ist der Massenterm nicht invariant. Da weiterhin \mathbf{A} spurlos im Flavourraum ist, ist diese $U(1)$ Symmetrie Untergruppe der axialen $SU_A(4)$ und nicht die axiale $U_A(1)$.*

Es ist also im masselosen Fall eine reduzierte chirale Symmetrie $U(1) \in SU_A(4)$ vorhanden, welche zu einem Goldstone-Boson, ähnlich dem Pion, führt, falls sie spontan gebrochen wird. Hierin liegt der Vorteil der staggered Fermion-Formulierung in Bezug auf die Untersuchung des chiralen Phasenübergangs in der QCD.

Im Vergleich zur Wilson-Formulierung führen staggered Fermionen also nicht zu einer vollständigen Beseitigung der Fermion-Doppeler, so sind auf einem 4-dimensionalen Gitter immer noch 4 Flavour von staggered Fermionen. Dafür erreicht man aber, daß ein Teil der chiralen Symmetrie erhalten ist. Es besteht sogar ein kausaler Zusammenhang zwischen chiraler Symmetrie einer Fermion-Formulierung auf dem Gitter und der Anzahl der Doppeler, welcher im Nielsen-Ninomiya Theorem erfaßt wird [14]. Dieses Theorem besagt, daß es in einer Gitterformulierung unter sehr allgemeinen Voraussetzungen für jede Quantenzahl die gleiche Anzahl links-

*Wie in [13] gezeigt kann man die 16 Elemente der durch die Dirac-Matrizen aufgespannten Clifford-Algebra, also $\{\mathbb{1}, \gamma_\mu, \sigma_{\mu\nu} = \frac{1}{2}[\gamma_\mu, \gamma_\nu], \gamma_5 \gamma_\mu, \gamma_5\}$, als Generatoren der $U(4)$ auffassen, wenn man sie zu hermiteschen Matrizen konvertiert. \mathbf{A} ist also einer der Generatoren der $SU_A(4)$.

wie rechtshändiger Teilchen im Fermionpropagator gibt. Dies bedeutet, daß chirale Symmetrie auf dem Gitter stets mit Doppelern einhergeht, oder umgekehrt, daß sich Fermion-Doppeler nur durch zusätzliche Massenterme von $\mathcal{O}(a)$, die die chirale Symmetrie brechen, vermeiden lassen. Die staggered Fermion-Formulierung stellt also so betrachtet einen Kompromiß zwischen den Extremen chirale Symmetrie und Nicht-Existenz von Fermion-Doppelern dar.

Kogut-Susskind Wirkung mit Eichwechselwirkung

Bisher wurde die freie Fermionwirkung betrachtet, das heißt die Kopplung der Fermionfelder an die Eichfelder wurde vernachlässigt. Eine eichinvariante Einbindung der Linkvariablen $U_\mu(x)$ in die staggered Fermionwirkung 1.32 läßt sich wie im Fall der naiven Wirkung realisieren:

$$S_F^{(KS)} = a^4 \sum_{x,\mu} \eta_\mu(x) \bar{\chi}(x) \frac{1}{2a} [U_\mu(x) \chi(x + \hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(x - \hat{\mu}) \chi(x - \hat{\mu})] \quad (1.37)$$

$$+ m a^4 \sum_x \bar{\chi}(x) \chi(x) \quad .$$

Dabei ist zu beachten, daß die χ -Felder nun einen Colour-Freiheitsgrad haben, $\chi = (\chi_a)_{a=1,\dots,N_c}$.

Die Konstruktion der q -Felder kann auf den Fall der Kopplung von Eichfeldern an die Quarks verallgemeinert werden. Eine mögliche Verallgemeinerung der Definitionen 1.34 und 1.35 ist

$$q_\alpha^f(y) \equiv \frac{1}{2} \sum_\xi (\gamma^\xi)_{\alpha f} \tilde{U}_\xi(y) \chi_\xi(y) \quad , \quad (1.38)$$

$$\bar{q}_\alpha^f(y) \equiv \frac{1}{2} \sum_\xi \bar{\chi}_\xi(y) \tilde{U}_\xi^\dagger(y) (\gamma^{\xi^\dagger})_{f\alpha} \quad , \quad (1.39)$$

wobei

$$\tilde{U}_\xi(y) \equiv [U_1(y)]^{\xi_1} [U_2(y + \xi_1)]^{\xi_2} \cdot \dots \cdot [U_4(y + \xi_1 + \dots + \xi_3)]^{\xi_4} \quad (1.40)$$

das Produkt von Linkvariablen $U_\mu(x)$ entlang eines definierten Pfades von y nach $y + \xi$ innerhalb eines Hyperkubus ist.

Diese Definitionen haben zwei wichtige Eigenschaften: Erstens erhalten sie die Eichinvarianz, das heißt alle Felder $(\bar{q}(y), q(y))$ transformieren sich bei einer Eichtransformation mit der Eichmatrix am Punkt y . Zweitens ändert die Einführung der Eichfelder die chiralen Eigenschaften der Theorie nicht, das heißt sie hat die gleiche $U(1) \otimes U(1)$ Symmetrie wie im freien Fall.

Naiver Kontinuum-Limes

Damit die so definierte Gitter-Fermionwirkung auch eine Diskretisierung der QCD-Kontinuum-Wirkung ist, ist es notwendig, daß sie im naiven Kontinuum-Limes ($a \rightarrow 0$) gegen die QCD-Kontinuum-Wirkung konvergiert. Um dies zu zeigen, entwickelt man die Wirkung in Ordnungen des Gitterabstands a . Dazu setzt man wieder die Entwicklung der Linkvariablen,

$$U_\mu(x) = ig a \left[A_\mu(x) + \frac{1}{2} a \partial_\mu A_\mu(x) + \frac{1}{6} a^2 \partial_\mu^2 A_\mu(x) + \mathcal{O}(a^3) \right] + \mathcal{O}(a^2 g^2) \quad , \quad (1.41)$$

in die Kogut-Susskind Wirkung mit den q -Feldern 1.38 und 1.39 ein. Nach einer längeren aber geradlinigen Rechnung ergibt sich

$$\begin{aligned} S_F^{(KS)} &= \sum_{y,\mu} (2a)^4 \bar{q}(y) \left\{ (\mathbb{1} \otimes \mathbb{1}) m + (\gamma_\mu \otimes \mathbb{1}) \mathbf{D}_\mu \right. \\ &\quad \left. + a(\gamma_5 \otimes t_{\mu 5}) \mathbf{D}_\mu^2 - \frac{1}{4} ig a \sum_\nu T_{[\mu,\nu]} F_{\mu,\nu}(y) \right\} q(y) + \mathcal{O}(a^2) \quad , \quad (1.42) \end{aligned}$$

wobei

$$\mathbf{D}_\mu(y) \equiv \partial_\mu + ig A_\mu(y) \quad (1.43)$$

die kovariante Ableitung ist. Des Weiteren ist

$$F_{\mu,\nu} \equiv \partial_\mu A_\nu(y) - \partial_\nu A_\mu(y) + ig [A_\mu(y), A_\nu(y)] \quad (1.44)$$

die kovariante Rotation und der antisymmetrische Tensor T ist definiert durch

$$T_{[\mu,\nu]} \equiv (\gamma_\mu - \gamma_\nu) \otimes \mathbb{1} + \frac{1}{2} \gamma_5^\dagger [\gamma_\mu, \gamma_\nu] \otimes (t_\mu + t_\nu)^\dagger t_5^\dagger \quad . \quad (1.45)$$

Im Limes ($a \rightarrow 0$) geht die Summe, $(2a)^4 \sum_{y,\mu}$, in 1.42 gegen ein Integral und es bleiben nur die ersten beiden Terme übrig. Dies ist der fermionische Teil der QCD Kontinuum-Lagrangefunktion.

Man sieht aber, daß es bei endlichem Gitterabstand a einen Term proportional a gibt, der verschiedene Flavour-Komponenten über die Eichfelder aneinander koppelt. Dies führt zur Brechung der Flavour-Symmetrie, die in der Kontinuum-Lagrangefunktion sowie auch in der Wilson-Fermion-Wirkung vorhanden ist. Auf dieses Gitterartefakt der staggered Fermion-Formulierung und eine Methode zur Verminderung dieses Effekts wird in Abschnitt 3.2 genauer eingegangen.

Kapitel 2

Verbesserte Eichwirkungen

Wie in Abschnitt 1.2 erläutert stellt die Standard Wilson-Eichwirkung eine Diskretisierung der Kontinuum-Wirkung dar, in dem Sinne, daß sie im naiven Kontinuum-Limes ($a \rightarrow 0$) gegen die QCD-Eichwirkung konvergiert. Man erhält aber durch die Diskretisierung bei endlichem Gitterabstand a Abweichungen von der Kontinuum-Wirkung, welche sich in einer störungstheoretischen Entwicklung in höheren Ordnungen $a^{2n} g^{2k}$, beginnend mit $\mathcal{O}(a^2)$, zeigen. Diese Diskretisierungsfehler führen zu entsprechenden Fehlern von der Ordnung a^2 bei der Berechnung von physikalischen Observablen in Monte-Carlo Rechnungen. Insbesondere findet man bei thermodynamischen Observablen wie Druck und Energiedichte bei endlicher Temperatur T Abweichungen von $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ auf Gittern mit N_τ Gitterpunkten in Zeitrichtung, da $aT = 1/N_\tau$.

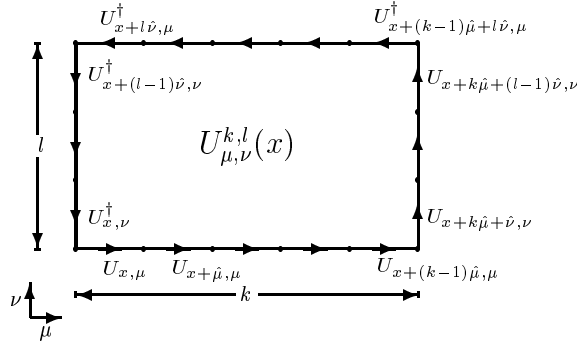
Andererseits ist aber durch die Kriterien des korrekten Kontinuum-Limes und der lokale Eichinvarianz die Gitter-Eichwirkung nicht eindeutig bestimmt, vielmehr gibt es im Prinzip unendlich viele Möglichkeiten für Gitter-Wirkungen, die diese Kriterien erfüllen. Die Eichinvarianz wird nämlich, wie in Abschnitt 1.2 gezeigt, von allen Operatoren, die Produkte von Linkvariablen entlang gerichteter, geschlossener Pfade enthalten, erfüllt. Man spricht nun von einer verbesserten Wirkung, wenn diese zu Diskretisierungsfehlern führt, welche mit einer höheren Ordnung in a beginnen.

Im folgenden sollen zwei Methoden erläutert werden, mit denen man solche verbesserten Wirkungen konstruieren kann. Die erste beruht auf einer störungstheoretischen Entwicklung der Gitteroperatoren, in der man Bedingungen für die Koeffizienten der beitragenden Operatoren in der Gitter-Wirkung sucht, die zu Verbesserungen führen. Diese Methode geht in ihren Ursprüngen auf Symanzik zurück, der dieses Verbesserungsprogramm an der ϕ^4 -Theorie entwickelt hat [16]. Die zweite Methode beruht auf der Renormierungsgruppen-Theorie und wurde von P. Hasenfratz und F. Niedermayer vorgeschlagen [15]. Dabei sucht man den Fixpunkt einer verallgemeinerten Gitter-Wirkung unter Renormierungsgruppen-Transformationen.

2.1 Störungstheoretisch verbesserte Eichwirkungen

Tree-level-Verbesserung

In diesem Abschnitt sollen verbesserte Wirkungen durch explizite Beseitigung der führenden $\mathcal{O}(a^2)$ Korrekturterme zur euklidischen Kontinuum-Wirkung konstruiert werden. Dazu betrachten wir einen Ansatz für eine verallgemeinerte Wirkung, indem zur Plaquettewirkung weitere Terme bestehend aus größeren Loops addiert werden. Wir beschränken uns dabei zunächst auf planare $k \times l$ Wilson-Loops $U^{k,l}$, die, um die Isotropie des Systems zu erhalten, in den beiden Richtungen symmetrisiert werden.



Die verallgemeinerte Wilson-Wirkung wird also definiert durch

$$\begin{aligned}
 S^I &= \sum_{x,\nu>\mu} \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} W_{\mu,\nu}^{k,l}(x) \\
 &\equiv \sum_{x,\nu>\mu} S_{\mu,\nu}^I(x) \quad , \quad (2.1)
 \end{aligned}$$

wobei $W_{\mu,\nu}^{k,l}$ die symmetrisierte Linearkombination der $k \times l$ Wilson-Loops in der (μ,ν) -Ebene bezeichnet,

$$\begin{aligned}
 W_{\mu,\nu}^{k,l}(x) &= 1 - \frac{1}{2N} \left(\text{Re Tr} U_{\mu,\nu}^{k,l}(x) + \text{Re Tr} U_{\mu,\nu}^{l,k}(x) \right) \\
 &= 1 - \frac{1}{2N} \left(\text{Re Tr} L_{x,\mu}^{(k)} L_{x+k\hat{\mu},\nu}^{(l)} L_{x+l\hat{\nu},\mu}^{(k)\dagger} L_{x,\nu}^{(l)\dagger} + (k \leftrightarrow l) \right) \quad . \quad (2.2)
 \end{aligned}$$

Dabei wird die abkürzende Schreibweise $L_{x,\mu}^{(k)} = \prod_{j=0}^{k-1} U_{\mu}(x + j\hat{\mu})$ für die Produkte der Links entlang einer Kante des Wilson-Loops verwendet. Die Koeffizienten $a_{k,l}$ sind zunächst beliebige reelle Zahlen.

Diese Wirkung soll nun in Tree-level, d.h. in niedrigster Ordnung der Kopplung g , entwickelt werden, indem wieder die Darstellung der Linkvariablen als Paralleltransporter 1.15 eingesetzt wird. Für den $k \times l$ Wilson-Loop ergibt sich damit

$$\begin{aligned} U_{\mu,\nu}^{k,l}(x) &= L_{x,\mu}^{(k)} L_{x+k\hat{\mu},\nu}^{(l)} L_{x+l\hat{\nu},\mu}^{(k)\dagger} L_{x,\nu}^{(l)\dagger} \\ &= \exp \left\{ ig \sum_{p=0}^{\infty} a^{2(p+1)} \sum_{q=0}^p c_{p,q}^{k,l} \partial_{\nu}^{(2(p-q))} \partial_{\mu}^{(2q)} F_{\mu,\nu}^{(0)} \left(x + \frac{l}{2} \hat{\nu} + \frac{k}{2} \hat{\mu} \right) + \mathcal{O}(g^2) \right\} \end{aligned} \quad (2.3)$$

wobei

$$c_{p,q}^{k,l} = \frac{k^{(2q+1)} l^{(2(p-q)+1)} 2^{(-2p)}}{(2q+1)!(2(p-q)+1)!} \quad (2.4)$$

Dabei ist $F_{\mu,\nu}^{(0)} = \partial_{\mu} A_{\nu} - \partial_{\nu} A_{\mu}$ der Kontinuumfeldstärketensor in niedrigster Ordnung g .

Setzt man dies in 2.2 ein und entwickelt die Exponentialfunktion, so erhält man

$$\begin{aligned} W_{\mu,\nu}^{k,l}(x) &= 1 - \frac{1}{2N} \left(\text{Re Tr} U_{\mu,\nu}^{k,l}(x) + \text{Re Tr} U_{\mu,\nu}^{l,k}(x) \right) \\ &= \frac{g^2}{4N} \text{Tr} \left\{ \left[\sum_{p=0}^{\infty} a^{2(p+1)} \sum_{q=0}^p c_{p,q}^{k,l} \partial_{\nu}^{(2(p-q))} \partial_{\mu}^{(2q)} F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \right]^2 + (k \leftrightarrow l) \right\} + \mathcal{O}(g^4) \end{aligned} \quad (2.5)$$

und für die verallgemeinerte Wirkung folgt daraus die Entwicklung bis $\mathcal{O}(a^8)$

$$\begin{aligned} S_{\mu,\nu}^I(x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} W_{\mu,\nu}^{k,l}(x) \\ &= \frac{g^2}{2N} a^4 \text{Tr} \left\{ \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} k^2 l^2 \right) F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \right. \\ &\quad + a^2 \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} k^2 l^2 (k^2 + l^2) \right) \frac{1}{24} F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') (\partial_{\mu}^{(2)} + \partial_{\nu}^{(2)}) F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \\ &\quad + a^4 \left[\left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} k^4 l^4 \right) \frac{1}{144} F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \partial_{\mu}^{(2)} \partial_{\nu}^{(2)} F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \right. \\ &\quad \left. + \left(\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} k^2 l^2 (k^4 + l^4) \right) \frac{1}{720} F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') (\partial_{\mu}^{(4)} + \partial_{\nu}^{(4)}) F_{\mu,\nu}^{(0)}(x') \right] \\ &\quad \left. + \mathcal{O}(a^6) \right\} + \mathcal{O}(g^4) \quad (2.6) \end{aligned}$$

An dieser Entwicklung erkennt man nun, daß man eine bis zu einer Ordnung a^{2n} verbesserte Wirkung erhält, die zum richtigen naiven Kontinuumlimes führt, wenn man die Koeffizienten $a_{k,l}$ so wählt, daß

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^l a_{k,l} k^2 l^2 = 1 \quad (2.7)$$

und die Vorfaktoren der Terme höherer Ordnung in a bis einschließlich der Ordnung a^{2n} gleich Null sind. Diese Überlegung führt auf ein Gleichungssystem für die Koeffizienten $a_{k,l}$, das in dieser Allgemeinheit jedoch die $a_{k,l}$ nicht eindeutig festlegt.

Die verbesserte Wirkung sollte aber nicht zuletzt auch aus Gründen der Handhabbarkeit in numerischen Simulationen möglichst *lokal* in dem Sinne, daß die berücksichtigten Loops von geringer Ausdehnung sind, und möglichst *einfach* in dem Sinne, daß die Zahl der eingehenden Terme gering ist, sein. Das bedeutet, daß die Koeffizienten für die größeren Wilson-Loops gleich Null gewählt werden.

Um die Korrekturen proportional a^2 in der Wirkung zu beseitigen, genügt es, zum Standard 4-Link-Plaquetteterm einen weiteren Loop mit linearer Ausdehnung zwei hinzuzunehmen. Im speziellen werden hier zwei Wirkungen betrachtet, bei der einen wird zum Plaquetteterm ein 6-Link Term, der symmetrisierte 2×1 Wilson-Loop, und bei der anderen ein 8-Link Term, der 2×2 Wilson-Loop, addiert.

Die nicht verschwindenden Koeffizienten dieser verbesserten Wirkungen lauten

$$\begin{aligned} I \equiv (1, 2) : \quad & a_{1,1} = \frac{5}{3} \quad , \quad a_{1,2} = -\frac{1}{6} \\ I \equiv (2, 2) : \quad & a_{1,1} = \frac{4}{3} \quad , \quad a_{2,2} = -\frac{1}{48} \end{aligned} \quad (2.8)$$

On-shell-Verbesserung

Wie oben erwähnt, führen die $\mathcal{O}(a^2)$ Korrekturen der Standard Wilson-Wirkung zu entsprechenden Fehlern in physikalischen Observablen. Dadurch ergibt sich ein alternativer Zugang zur Verbesserung der Wirkung. Anstatt direkt die Cut-off-Abhängigkeit der Wirkung zu betrachten, kann man auch Bedingungen für die Koeffizienten in der Wirkung finden, die die Cut-off-Abhängigkeit bestimmter Observablen reduzieren. Dabei ergibt sich jedoch das Problem, daß die Gitter-Operatoren, die die entsprechende Observable diskretisieren, selbst eine intrinsische Cut-off-Abhängigkeit mit sich bringen.

Dieses Problem kann vermieden werden, wenn man sich auf die Verbesserung spektraler Größen wie z.B. das statische Quark-Antiquark-Potential beschränkt, da diese nicht von der Wahl des Operatorfeldes abhängen. Diese Methode bezeichnet man als On-shell-Verbesserung. Sie wurde von M. Lüscher und P. Weisz eingeführt [17]

nachdem eine ähnliche Vorgehensweise, bei der jedoch auch nicht spektrale, also Off-shell-Größen betrachtet wurden, die zu “unphysikalischen” Bedingungen an die Koeffizienten führen, von P. Weisz und R. Wohlert verwendet wurde [18].

Physikalische Größen M , wie Massen stabiler Teilchen und deren Streuamplituden, können auf dem Gitter aus euklidischen Korrelationsfunktionen entsprechender Gitter-Operatoren extrahiert werden. Diese hängen von der nackten Kopplung g und einem Satz äußerer raumartiger Impulse p ab und sind in Gittereinheiten gegeben. Über die physikalische Dimension a^δ dieser Größe kann man nun eine skalierte Größe m definieren,

$$m(p, g, a) = a^{-\delta} M(ap = k, g) \quad . \quad (2.9)$$

In einer Gittertheorie mit perfektem Skalenverhalten wäre es möglich eine Funktion $\bar{g}(a)$ zu finden, für die

$$a \frac{d}{da} m(p, \bar{g}(a), a) = 0 \quad (2.10)$$

für alle Größen m gilt. Dies ist der Ansatzpunkt bei der Konstruktion perfekter Wirkungen im nächsten Abschnitt. Für die Wilson-Wirkung ist dies jedoch nicht möglich und man findet in Störungstheorie ein approximatives Skalenverhalten im Limes $a \rightarrow 0$

$$a \frac{d}{da} m(p, \bar{g}(a), a) = \mathcal{O}(a^2) \quad . \quad (2.11)$$

Man nennt eine Wirkung nun on-shell-verbessert, wenn die Korrekturen in 2.11 für alle niedrigen Energieniveaus m zu $\mathcal{O}(a^4)$ reduziert sind.

Für diese Verbesserung muß man neben dem Plaquette-Term sämtliche Operatoren der Dimension 6 betrachten, wobei die Dimension K eines Operators Ω die führende Ordnung in einer a -Entwicklung ist:

$$\Omega \xrightarrow{a \rightarrow 0} \sum_{k=K}^{\infty} a^k \omega_k \quad . \quad (2.12)$$

Eine Basis im Raum aller Dimension-6 Eichoperatoren ist durch die folgenden Operatoren gegeben:

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \mathcal{O}_1 - 8\mathcal{O}_0 \quad , \\ \Omega_2 &= \mathcal{O}_2 - 8\mathcal{O}_0 \quad , \\ \Omega_3 &= \mathcal{O}_3 - 16\mathcal{O}_0 \quad , \end{aligned} \quad (2.13)$$

mit

$$\begin{aligned}
\mathcal{O}_0(x) &= \sum_{\mathcal{P}_0} \left(1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[\text{Diagram of a square loop} \right] (x) \right) , \\
\mathcal{O}_1(x) &= \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{P}_1} \left(1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[\text{Diagram of a rectangular loop} \right] (x) \right) , \\
\mathcal{O}_2(x) &= \frac{1}{4} \sum_{\mathcal{P}_2} \left(1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[\text{Diagram of a cube-like loop} \right] (x) \right) , \\
\mathcal{O}_3(x) &= \frac{1}{12} \sum_{\mathcal{P}_3} \left(1 - \frac{1}{N_c} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} \left[\text{Diagram of a more complex cube-like loop} \right] (x) \right) ,
\end{aligned} \tag{2.14}$$

wobei \mathcal{P}_i die Menge aller Loops am Punkt x der entsprechenden Form ist*.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich ein Ansatz für die verbesserte Wirkung als

$$S^I = \sum_x \sum_{i=0}^3 c_i(g^2) \mathcal{O}_i(x) , \tag{2.15}$$

wobei die Koeffizienten c_i Funktionen der Kopplung g sind, welche bei $g=0$ regulär sind.

Entwickelt man die einzelnen Beiträge, so erhält man analog zu 2.7 aus der Forderung nach dem korrekten Kontinuum-Limes eine Normierungsbedingung an die Koeffizienten:

$$c_0(g^2) + 4c_1(g^2) + 2c_2(g^2) + \frac{4}{3}c_3(g^2) = 1 . \tag{2.16}$$

Die Koeffizienten c_i können im Prinzip Ordnung für Ordnung in g^2 in Störungstheorie berechnet werden. Dazu entwickelt man diese

$$c_i(g^2) = c_i^{(0)} + g^2 c_i^{(2)} + \mathcal{O}(g^4) . \tag{2.17}$$

Man kann nun zeigen, daß einer der Koeffizienten c_1 und c_3 redundant ist, denn es gilt:

Ist S^I eine on-shell-verbesserte Wirkung von der Form 2.15, so gibt es Koeffizienten $\zeta_i(g^2; S)$ so, daß auch

$$S + \epsilon \sum_x \sum_{i=1}^3 \zeta_i(g^2; S) \Omega_i(x) \tag{2.18}$$

*Das bedeutet für die planaren Loops \mathcal{O}_0 und \mathcal{O}_1 die Berücksichtigung aller entsprechenden Pfade, die in positiver Richtung von x abgehen, und für die nicht-planaren Loops \mathcal{O}_2 und \mathcal{O}_3 die Berücksichtigung aller entsprechenden Pfade, die auf den Kanten von Einheitswürfeln liegen, welche in positiver Richtung von x abgehen.

eine on-shell-verbesserte Wirkung in niedrigster Ordnung ϵ ist und

$$\begin{aligned}\zeta_1(0; S) &= 1 \quad , \\ \zeta_2(0; S) &= 0 \quad , \\ \zeta_3(0; S) &= 1 \quad ,\end{aligned}$$

für alle Wirkungen S .

Angenommen die Koeffizienten c_i wären bis zur Ordnung g^{2l} bestimmt. Wählt man nun den Parameter ϵ proportional zu g^{2l} , so folgt aus obigem Satz, daß diese Koeffizienten nur bis auf einen Shift

$$\begin{aligned}c_1^{(2l)} &\rightarrow c_1^{(2l)} + \lambda \quad , \\ c_2^{(2l)} &\rightarrow c_2^{(2l)} \quad , \\ c_3^{(2l)} &\rightarrow c_3^{(2l)} + \lambda \quad ,\end{aligned}$$

für beliebiges λ bestimmt sind. Man kann also zum Beispiel in jeder Ordnung g^2 den Koeffizienten c_3 zu Null wählen:

$$c_3(g^2) = 0 \quad . \quad (2.19)$$

Zum Beweis des obigen Satzes definiert man eine Transformation der Eichfelder, die das Energiespektrum unverändert läßt, aber zusätzliche Terme der Dimension 6 erzeugt. Diese isospektrale Transformation ist

$$\tilde{U}_\mu(n) \equiv e^{\epsilon X_\mu(n)} U_\mu(n) \quad , \quad (2.20)$$

wobei ϵ infinitesimal und $X_\mu(n)$ eine anti-hermitesche, spurlose Matrix ist, die in Anhang B definiert ist. Die zusätzlichen Terme der Dimension 6 lassen sich dann bis auf Fehler der Ordnung a^4 in der Basis 2.13 ausdrücken und sorgen so für den Shift in den Koeffizienten.

Da es also nur zwei unabhängige Koeffizienten c_i gibt, kann man diese durch die Forderung nach Abwesenheit von $\mathcal{O}(a^2)$ Skalenverletzungen in zwei bestimmten On-shell-Größen bestimmen.

Lüscher und Weisz haben die Koeffizienten bis Ordnung g^2 durch die Berechnung der Skalenverletzungen einer Mesonmasse m_A und einer Meson-Streuamplitude λ in Tree-level ($\mathcal{O}(g^0)$) und in 1-loop-Ordnung ($\mathcal{O}(g^2)$) bestimmt [17]. Dabei ergibt sich in Tree-level

$$m_A^{(0)} = m \left[1 - a^2 m^2 \left(2c_1^{(0)} - 4c_2^{(0)} + \frac{1}{12} \right) + \mathcal{O}(a^4) \right] \quad , \quad (2.21)$$

$$\lambda^{(0)} = -8m \left\{ 1 - \frac{1}{2} a^2 m^2 \left[9 \left(2c_1^{(0)} - 4c_2^{(0)} + \frac{1}{12} \right) + 8c_2^{(0)} \right] + \mathcal{O}(a^4) \right\} \quad .(2.22)$$

Die Skalenverletzungen in $\mathcal{O}(a^2)$ sind also beseitigt wenn für die Koeffizienten gilt

$$2c_1^{(0)} - 4c_2^{(0)} = -\frac{1}{12} , \quad (2.23)$$

$$9 \left(2c_1^{(0)} - 4c_2^{(0)} + \frac{1}{12} \right) + 8c_2^{(0)} = 0 . \quad (2.24)$$

Diese Bedingungen zusammen mit der Normierung 2.16 führen zu den selben Koeffizienten, wie im vorangegangenen Abschnitt für die Wirkung $S^{(1,2)}$:

$$c_0^{(0)} = \frac{5}{3} , \quad c_1^{(0)} = -\frac{1}{6} , \quad c_2^{(0)} = 0 . \quad (2.25)$$

Die Skalenverletzungen in $\mathcal{O}(a^2g^2)$ wurden numerisch bestimmt. Daraus ergeben sich die 1-loop-Koeffizienten für die $SU(3)$ Eichgruppe

$$c_0^{(2)} = 0.2370 , \quad c_1^{(2)} = -0.05042 , \quad c_2^{(2)} = -0.01764 . \quad (2.26)$$

2.2 Perfekte Eichwirkungen

Perfekte Wirkungen

Eine radikale Lösung des Problems der Skalenverletzungen und damit der Cut-off-Effekte in Gittersimulationen wäre eine *perfekte* Gitter-Wirkung, die keinerlei Gitterartefakte mehr besitzt. Die Existenz solcher perfekten Wirkungen folgt aus Wilsons Renormierungsgruppen-Theorie [1, 19].

Als Ausgangspunkt dient eine Wirkung, die aus einer unendlichen Zahl von Operatoren besteht und die die grundsätzlichen Anforderungen der Eichinvarianz, der Lokalität, der diskreten Translations- und Rotationsinvarianz und des korrekten naiven Kontinuum-Limes erfüllt. Die entsprechenden Kopplungen der einzelnen Operatoren seien $\{c_1, c_2, \dots\}$. Die Wirkung βS wird also durch einen Punkt im unendlich dimensionalen Raum der Kopplungen (β, c_1, c_2, \dots) repräsentiert (siehe Abbildung 2.1).

Eine Renormierungsgruppen-Transformation ist in diesem Fall eine Blocktransformation im Konfigurationsraum, die die Zustandssumme $Z = \int [DU] \exp(-\beta S(U))$ invariant läßt, d.h. man definiert durch die Linkvariablen U_μ auf dem Gitter mit Gitterabstand a geblockte Linkvariablen $V_\mu(n_B)$, die auf einem größeren Gitter mit Gitterabstand $a' = k_B a$ leben und die durch eine lokale Mittelung aus den ursprünglichen Linkvariablen gebildet werden. Dabei ist $k_B \in \mathbb{N}$ der sogenannte Skalenfaktor. Unter wiederholten Blocktransformationen wandert die Wirkung im Raum der

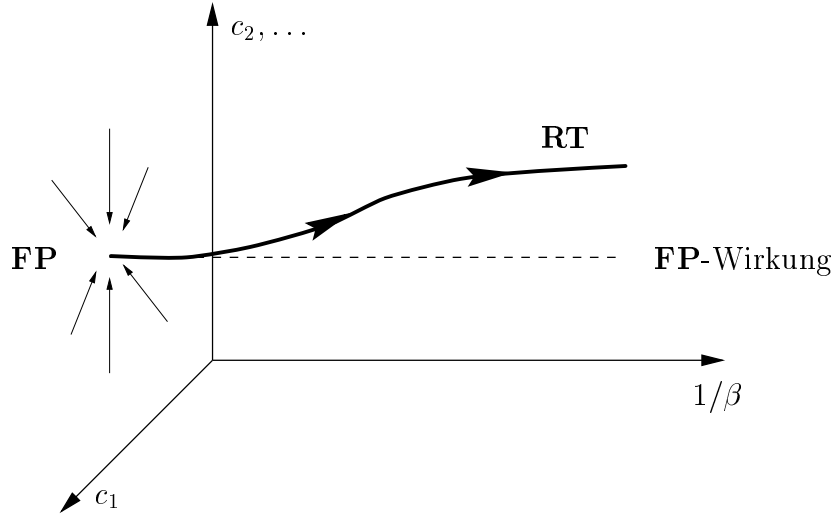


Abbildung 2.1: Schematisches Flußdiagramm für asymptotisch frei Eichtheorien. Renormierte Trajektorie (**RT**) und Fixpunkt-Wirkung sind im Parameterraum (c_1, c_2, \dots) über der Kopplung g^2 aufgetragen. Die Renormierte Trajektorie endet im Fixpunkt (**FP**) in der $g^2=0$ Ebene.

Kopplungskonstanten. Abbildung 2.1 zeigt das erwartete Flußdiagramm einer asymptotisch freien Theorie wie der $SU(3)$ Eichtheorie.

In der $\beta=\infty$ Hyperebene gibt es einen Fixpunkt (**FP**) der RG-Transformation c_1^*, c_2^*, \dots , der in seiner Umgebung in dieser Hyperebene attraktiv wirkt. Die exakte Position des Fixpunktes hängt von der speziellen Wahl der Blocktransformation ab. Bei endlichem β wächst die Kopplung $g^2 = 2N_c/\beta$ gemäß der β -Funktion einer asymptotisch freien Theorie. Die renormierte Trajektorie (**RT**), welche die $\beta=\infty$ Hyperebene an der Stelle des Fixpunktes verläßt, ist der Attraktor der Flußlinien der RG-Transformation, die in einer Umgebung des Fixpunktes bei endlichem β starten.

Die Punkte der renormierten Trajektorie definieren perfekte Wirkungen, d.h. Wirkungen die völlig frei von Cut-off-Effekten sind. Ein vereinfachtes Argument dafür geht wie folgt. Bei einem gegebenen β -Wert ist der entsprechende Punkt der renormierten Trajektorie durch unendlich viele RG-Transformationen mit einer infinitesimalen Umgebung des Fixpunktes verbunden. Da jeder dieser Schritte den Gitterabstand um einen Faktor k_B vergrößert, entspricht jeder Abstand bei dem gegebenen β (sogar 1 Gittereinheit) einem großen Abstand in der Nähe des Fixpunktes. Die infinitesimale Umgebung des Fixpunktes entspricht nun dem tatsächlichen (nicht naiven) Kontinuum-Limes, hier gibt es keinerlei Cut-off-Effekte bei langen Distanzen. Daher gibt es auf der RT bei dem gegebenen β bei beliebigen Abständen keine Gitterartefakte.

SU(3) Fixpunkt-Wirkungen

Die Konstruktion perfekter Wirkungen für die Gittereichtheorie wurde von P. Hasenfratz und F. Niedermayer vorgeschlagen [15]. Die Vorgehensweise ist dabei wie folgt. Man definiert eine Blocktransformation mit Skalenfaktor 2 durch

$$e^{-\beta' S'(V)} = \int [DU] \exp\{-\beta(S(U) + T(U, V))\} , \quad (2.27)$$

wobei der Kern dieser Transformation, $T(U, V)$, von der Form

$$T(U, V) = \sum_{n_B, \mu} \left\{ -\frac{\kappa}{N_c} \text{Re Tr} (V_\mu(n_B) Q_\mu^\dagger(n_B)) + \mathcal{N}(Q_\mu(n_B)) \right\} \quad (2.28)$$

ist. Die komplexe $N_c \times N_c$ Matrix $Q(n_B)$ ist dabei ein Mittel über die Linkvariablen auf dem feinen Gitter in der Umgebung des ‘‘groben’’ Links (n_B, μ) . Der letzte Term in Gleichung 2.28 sorgt für die Invarianz der Zustandssumme:

$$e^{\beta \mathcal{N}(Q)} = \int_{SU(N_c)} [dW] \exp \left\{ \beta \frac{\kappa}{N_c} \text{Re Tr} (W Q^\dagger) \right\} . \quad (2.29)$$

Der Kern der Blockprozedur wird eichinvariant gewählt, darüber hinaus gibt es jedoch eine große Wahlfreiheit wie auch für den Parameter κ , die man zur Optimierung nutzen kann.

Die Integration in Gleichung 2.27 kann man bei endlichem β nicht analytisch ausführen, deshalb verfolgt man eine andere Strategie. In der $\beta = \infty$ Hyperebene reduziert sich Gleichung 2.28 auf eine Sattelpunktgleichung:

$$S'(V) = \min_{\{U\}} \{S(U) + T(U, V)\} ; \quad (2.30)$$

der Fixpunkt dieser Transformation ist daher

$$S^{FP}(V) = \min_{\{U\}} \{S^{FP}(U) + T(U, V)\} . \quad (2.31)$$

Die Lösung dieser Fixpunktgleichung ist eine klassisch-perfekte Wirkung. Man definiert nun die Fixpunkt-Wirkung bei endlichem β durch $\beta S^{FP}(U)$. Dies entspricht der Linie, welche die kritische Fläche ($\beta = \infty$) orthogonal verläßt. Obschon die ‘‘klassischen’’ Cut-off-Korrekturen von der $\mathcal{O}(g^0 a^{2n})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ beseitigt sind, weicht die FP-Wirkung bei endlichem β von der ‘‘quanten’’-perfekten Wirkung entlang der renormierten Trajektorie ab; die FP-Wirkung führt also zu Skalenverletzungen in

$\mathcal{O}(g^2)$.[†] Für große β liegt die FP-Wirkung beliebig nah an der renormierten Trajektorie.

Die praktische Lösung der Fixpunktgleichung für $SU(3)$ wurde in [24] für zwei verschiedene Typen von Blocktransformationen durchgeführt, die mit Typ I und Typ II bezeichnet werden, sowie in [25] für einen weiteren Typ der Blocktransformation (Typ III). Diese Lösungen erfordern eine Parametrisierung der Wirkung, welche ausreichend einfach ist. Dadurch werden zwangsläufig wieder Cut-off-Effekte induziert, dies gilt insbesondere für Parametrisierungen, die nur endlich viele Operatoren berücksichtigen. Es hängt jedoch auch von der gewählten Blocktransformation ab, wie gut die Parametrisierung ist. Die gewählten Parametrisierungen enthalten Potenzen der Operatoren \mathcal{O}_0 , \mathcal{O}_1 und \mathcal{O}_2 , die auch für die on-shell-verbesserten Wirkungen betrachtet wurden und in 2.14 definiert wurden.

$$\begin{aligned}
S^{(FP)} = \sum_x \left\{ \right. & \sum_{\mathcal{P}_0} \sum_{n=1}^4 c_0^n \left(\frac{1}{N_c} \text{Re Tr} \left[\mathbb{1} - \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \end{array} (x) \right] \right)^n \\
& + \frac{1}{2} \sum_{\mathcal{P}_1} \sum_{n=1}^4 c_1^n \left(\frac{1}{N_c} \text{Re Tr} \left[\mathbb{1} - \begin{array}{c} \text{---} \\ \square \\ \text{---} \\ \square \end{array} (x) \right] \right)^n \\
& \left. + \frac{1}{4} \sum_{\mathcal{P}_2} \sum_{n=1}^4 c_2^n \left(\frac{1}{N_c} \text{Re Tr} \left[\mathbb{1} - \begin{array}{c} \square \\ \text{---} \\ \square \\ \text{---} \\ \square \end{array} (x) \right] \right)^n \right\}. \quad (2.32)
\end{aligned}$$

In allen Fällen müssen die Koeffizienten die Normierungsbedingung 2.16 erfüllen. Für die Typen I und II wurden die Koeffizienten des 1×2 Terms gleich Null gewählt ($c_1^n = 0$). Für den Typ III wurden drei Fälle unterschieden: 1. $c_1^n = 0$ (Typ IIIa), 2. $c_1^n = 0$ und On-shell-Tree-level-Bedingung 2.23 (Typ IIIb) und 3. $c_1^n \neq 0$ und On-shell-Tree-level-Bedingung 2.23 (Typ IIIc).

Die Koeffizienten wurden dann auf einer endlichen Anzahl (~ 400) zufällig gewählter Eichfeldkonfigurationen optimiert. Dazu wurden diese Konfigurationen als “grobe” Linkvariablen $\{V\}$ in die linke Seite der Fixpunktgleichung 2.31 eingesetzt und dann die rechte Seite numerisch minimiert.

Es soll noch einmal betont werden, daß die so bestimmten Wirkungen weder perfekt noch klassisch perfekt sind, sondern eine Approximation an eine klassisch perfekte Fixpunkt-Wirkung sind.

[†]Man kann formale Argumente dafür angeben, daß die FP-Wirkung auch 1-loop-perfekt ist [15, 19]. Dies fand man in einer Analyse der Cut-off-Effekte der Massenslücke (“mass gap”) bei endlichem Volumen, $m(L)$, für das 2-dimensionale nicht-lineare σ -Modell [21] sowie für das Schwinger-Modell [22] bestätigt. Das stellte sich aber als Zufall heraus und liegt an der speziellen Wahl der Observable. Jüngere Untersuchungen der kleinsten Energie $E(L, p)$ im $p \neq 0$ Kanal zeigten auch kleine Cut-off-Effekte im 1-loop-Level für eine klassisch perfekte Wirkung [23].

Die FP-Wirkungen Typ I und Typ IIIa wurden von A. Papa für Monte-Carlo-Rechnungen in der Thermodynamik eingesetzt [4]. Die Ergebnisse werden in Abschnitt 2.3 diskutiert.

Iwasaki-Wirkung

Eine weitere verbesserte Eichwirkung, die ausgiebig für Untersuchungen der QCD Thermodynamik benutzt wurde, ist von Y. Iwasaki vorgeschlagen worden [26, 27]. Unter Verwendung von Renormierungsgruppen-Methoden wurde eine Wirkung so konstruiert, daß sie nah an der renormierten Trajektorie liegt. Dazu betrachtet man zunächst eine Wirkung die nur den Plaquette-Term, \mathcal{O}_0 , und den 1×2 Term, \mathcal{O}_1 , enthält. Die Parameter werden dann so gewählt, daß nach nur einer Renormierungsgruppen-Transformation die transformierte Wirkung nahe an der renormierten Trajektorie liegt, obschon diese natürlich nicht mehr in dem 2-Parameter Unterraum der ursprünglichen Wirkung liegt.[‡]

Die beiden Koeffizienten der Iwasaki-Wirkung sind

$$c_0 \equiv c_0^{\text{RG}} = 3.648 ; \quad c_1 \equiv c_1^{\text{RG}} = -0.662 . \quad (2.33)$$

Die Koeffizienten sind so gewählt, daß sie die Normierungsbedingung 2.16 erfüllen.

2.3 Thermodynamik und Hochtemperatur-Limes

Bei hohen Temperaturen wird die Wechselwirkung eines Systems aus Gluonen und Quarks von Moden hoher Impulse dominiert. Auf Grund der asymptotischen Freiheit der QCD erwartet man, daß in der Hochtemperaturphase aus der stark wechselwirkenden Materie ein Plasma aus nur schwach wechselwirkenden Teilchen wird, das im Limes unendlicher Temperatur das Verhalten eines idealen, also nicht wechselwirkenden Gases masseloser Quarks und Gluonen annimmt. Das Verhalten eines idealen Gases ist im wesentlichen von der Anzahl der Freiheitsgrade bestimmt. Die Energiedichte ϵ/T^4 sollte also beispielsweise für ein Gluonengas im Limes $T \rightarrow \infty$ den Stefan-Boltzmann Wert ϵ_{SB}/T^4 annehmen.

Andererseits entspricht der Gitterabstand a einem ultraviolett Cut-off im Impulsraum. Dieser führt auf dem Gitter bei hohen Temperaturen wegen der Dominanz großer Impulse zu entsprechenden ultraviolett Cut-off-Effekten, die für die Standard Wirkung von $\mathcal{O}(a^2)$ sind. Betrachtet man nun das System bei einer bestimmten physikalischen Temperatur T , so zeigen sich diese Cut-off Effekte wegen des Zusammenhangs $a = (N_\tau T)^{-1}$ in Korrekturen zum Stefan-Boltzmann Limes, die von $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ sind.

[‡]Details zu dieser Konstruktion wurden nicht veröffentlicht.

Hochtemperatur-Limes

In diesem Abschnitt soll dargestellt werden, welchen Einfluß die oben betrachteten verbesserten Eichwirkungen auf die Cut-off-Effekte der Thermodynamik der $SU(3)$ Gittereichtheorie haben. Dazu sollen zunächst diese Cut-off-Effekte im störungstheoretischen Hochtemperatur-Limes für die Energiedichte ϵ und die freie Energiedichte f diskutiert werden.

Zwischen den thermodynamischen Größen Energiedichte ϵ , Druck p und freie Energiedichte f gilt für ein ideales Gas die Relation

$$\epsilon = 3p = -3f \quad . \quad (2.34)$$

Andererseits ist der Stefan-Boltzmann Wert für die Energiedichte eines idealen Gluon-Gases gegeben durch

$$\epsilon_{SB}/T^4 = (N_c^2 - 1) \frac{\pi^2}{15} \quad . \quad (2.35)$$

In der Gitterformulierung ist die Temperatur durch $T = (N_\tau a)^{-1}$ gegeben. Weiterhin ist der Gitterabstand a durch die Kopplung g in der Weise bestimmt, daß $\lim_{g \rightarrow 0} a(g) = 0$. Bei festem N_τ entspricht also dem Hochtemperatur-Limes ($T \rightarrow \infty$) der Limes $g \rightarrow 0$, der sogenannte Schwache-Kopplungs-Limes.

Zunächst betrachten wir also eine Entwicklung der Wirkung in Ordnungen der Kopplung g

$$\beta S = S^{(0)} + gS^{(1)} + g^2 S^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \quad . \quad (2.36)$$

Dazu entwickelt man die Linkvariablen $U_\mu(x) = \exp(igA_\mu^a(x)\lambda_a)$ im Impulsraum in Potenzen von g . Der Gitterabstand a wird der Einfachheit halber zu 1 gesetzt. Die Impulssummen im Fourierraum bezeichnen wir dabei mit

$$\int_k = \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \sum_p \quad , \quad (2.37)$$

wobei $k_\mu = (2\pi/N_\sigma)n_\mu$, $-N_\sigma/2 \leq n_\mu \leq N_\sigma/2 - 1$ für $\mu \neq 4$ und $k_4 = (2\pi/N_\tau)n_4$, $-N_\tau/2 \leq n_4 \leq N_\tau/2 - 1$.

Die Impulsraumfelder sind in der Mitte des Links definiert,

$$A_\mu^a(k) = \sum_x e^{-ikx - ik_\mu/2} A_\mu^a(x + \hat{\mu}/2) \quad . \quad (2.38)$$

In führender Ordnung läßt sich damit die Wirkung schreiben

$$S_G^{(0)} = -\frac{1}{2} \int_k \sum_{\mu,\nu} A_\mu^a(-k) \Delta_{G\mu,\nu}(k) A_\mu^a(k) \quad , \quad (2.39)$$

mit dem inversen Gluonpropagator

$$\Delta_{G_{\mu,\nu}}(k) = G_{\mu,\nu} + \xi g_\mu(k) g_\nu(k) \quad , \quad (2.40)$$

wobei $\xi g_\mu(k) g_\nu(k)$ der Eichfixierungsterm ist.

Für die verbesserten Wirkungen ist der inverse freie Propagator eine Summe über die Beiträge der Operatoren in der Wirkung:

$$G_{\mu,\nu}(k) = \sum_i c_i^{(0)} G_{\mu,\nu}^{(i)}(k) \quad (2.41)$$

Details zu dieser Rechnung findet man in [3]. Die Matrizen $G_{\mu,\nu}^{(i)}$ wurden dort für die Plaquette, den 1×2 Operator und den 2×2 Operator bestimmt. Die Beiträge des Würfel-Operators, \mathcal{O}_2 , wurden erst nachträglich berechnet, sie sind in Anhang A gegeben.

Für die planaren Loops, die in Abschnitt 2.1 für die Konstruktion tree-level-verbesselter Wirkungen verwendet wurden, kann man aus den Beiträgen zum inversen Propagator einen diagonalen Anteil separieren:

$$G_{\mu,\nu}^{(i,j)}(k) = \left(\sum_{\rho=1}^4 N_{\mu;\rho}^{i,j}(k) \right) \delta_{\mu\nu} - M_{\mu,\nu}^{i,j}(k) \quad (2.42)$$

Energiedichte ϵ

Zur Berechnung des Hochtemperatur-Limes der Energiedichte reicht es aus, die Differenz zwischen Erwartungswerten von räumlichen und zeitlichen Anteilen der Wirkung störungstheoretisch auszuwerten [28]. Da diese nur für planare Loops eindeutig definiert sind, beschränken wir uns für die Energiedichte auf die Standard Wirkung und die in Abschnitt 2.1 definierten tree-level-verbesserten Wirkungen. In führender Ordnung gilt

$$\frac{\epsilon}{T^4} = \frac{6N_c}{g^2} N_\tau^4 (\langle S_\sigma^I \rangle - \langle S_\tau^I \rangle) + \mathcal{O}(g^2) \quad (2.43)$$

$$= \frac{3(N_c^2 - 1)}{2} N_\tau^4 (S_\sigma^{I,(0)} - S_\tau^{I,(0)}) + \mathcal{O}(g^2) \quad , \quad (2.44)$$

wobei $S_\sigma^{I,(0)}$ und $S_\tau^{I,(0)}$ die Entwicklungskoeffizienten der Erwartungswerte von räumlichen und zeitlichen Anteilen der Wirkung in führender Ordnung sind,

$$\langle S_\sigma^I \rangle = \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \left\langle \sum_{x,\mu < \nu < 4} S_{\mu,\nu}^I(x) \right\rangle = g^2 \frac{N_c^2 - 1}{4N_c} S_\sigma^{I,(0)} + \mathcal{O}(g^4) \quad , \quad (2.45)$$

$$\langle S_\tau^I \rangle = \frac{1}{3N_\sigma^3 N_\tau} \left\langle \sum_{x,\mu=1,2,3} S_{\mu,4}^I(x) \right\rangle = g^2 \frac{N_c^2 - 1}{4N_c} S_\tau^{I,(0)} + \mathcal{O}(g^4) \quad . \quad (2.46)$$

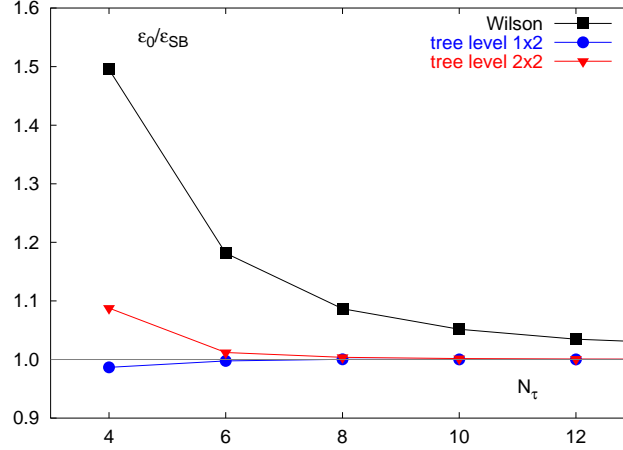


Abbildung 2.2: Energiedichte im Hochtemperatur-Limes, ϵ_0 , für die Standard Wilson-Wirkung (schwarz) und die tree-level-verbesserten Wirkungen $S^{(1,2)}$ (blau) und $S^{(2,2)}$ (rot) im Verhältnis zum Stefan-Boltzmann Wert ϵ_{SB} über der zeitlichen Gittergröße N_τ .

Mit den oben definierten Beiträgen zum freien Propagator ist dann

$$S_\sigma^{I,(0)} = \frac{1}{3} \sum_{\mu < \nu < 4} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i a_{i,j} S_{\mu,\nu}^{(i,j),(0)} \quad (2.47)$$

$$S_\tau^{I,(0)} = \frac{1}{3} \sum_{\mu=1,2,3} \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^i a_{i,j} S_{\mu,4}^{(i,j),(0)} \quad , \quad (2.48)$$

mit

$$S_{\mu,\nu}^{(i,j),(0)} = \int_k \left(N_{\mu;\nu}^{(i,j)}(k) \Delta_{G \mu,\mu}^{-1}(k) + N_{\nu;\mu}^{(i,j)}(k) \Delta_{G \nu,\nu}^{-1}(k) - 2M_{\nu,\mu}^{(i,j)}(k) \Delta_{G \mu,\nu}^{-1}(k) \right) \quad . \quad (2.49)$$

Die Impulssummen in 2.49 kann man numerisch ausführen. Um endliche Volumeneffekte zu eliminieren, betrachten wir dazu den Limes $N_\sigma \rightarrow \infty$, in dem die räumlichen Impulssummen zu Integralen werden, die numerisch per Gauß-Legendre-Integration berechnet wurden.

Abbildung 2.2 zeigt die Cut-off-Abhängigkeit der Energiedichte im Hochtemperatur-Limes normiert auf den Stefan-Boltzmann Wert. Für die Standard Wilson-Wirkung findet man bei $N_\tau = 4$ Abweichungen von etwa 50%, die mit $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ abklingen. Für die tree-level-verbesserten Wirkungen sind nicht nur die Abweichungen bei kleinen N_τ stark reduziert (auf etwa 9% für $S^{(2,2)}$ und auf etwa 1% für $S^{(1,2)}$ bei $N_\tau = 4$) sondern auch die Korrekturen von der Ordnung $(1/N_\tau^2)$ beseitigt, sie sind von $\mathcal{O}(1/N_\tau^4)$. Es sei bemerkt, daß die on-shell-verbesserte Wirkung 2.25 auf

Tree-level mit der Wirkung $S^{(1,2)}$ übereinstimmt, es ergeben sich also die selben Cut-off-Effekte im Hochtemperatur-Limes.

Freie Energiedichte f

Wie oben gesagt, ist die Definition räumlicher und zeitlicher Komponenten des Würfeloperators, die man zur Berechnung der Energiedichte benötigt, problematisch. Um aber auch die Cut-off-Effekte im Hochtemperatur-Limes für die perfekten Wirkungen, welche im Abschnitt 2.2 definiert wurden, zu studieren, ist es sinnvoll die freie Energiedichte zu betrachten, die einfach durch den Logarithmus der Zustandssumme gegeben ist, so daß diese Definitions-Probleme nicht auftreten. Es gilt

$$e^{-N_\sigma^3 N_\tau f} \equiv Z = \int [DU] e^{-\beta S_G[U]} . \quad (2.50)$$

Setzt man die Entwicklung der Wirkung 2.36 ein, so erhält man

$$e^{-N_\sigma^3 N_\tau f} = \int [DA] \Delta_{\text{FP}}[A] e^{-\beta S_G^{(0)}[A]} \{1 + \mathcal{O}(g^2)\}, \quad (2.51)$$

wobei Δ_{FP} die Faddeev-Popov Determinante ist. Nach Integration über die Eichfelder erhält man

$$e^{-N_\sigma^3 N_\tau f} = \prod_p \tilde{\Delta}_{\text{FP}}(p) \text{Det} [\Delta_G^{-1}(p)] \{1 + \mathcal{O}(g^2)\}, \quad (2.52)$$

mit $\tilde{\Delta}_{\text{FP}}(p) = \{\xi[\sum_\nu g_\nu(k) \sin(k_\nu/2)]^2\}^{-1}$. Durch Logarithmieren erhält man den führenden Beitrag zur freien Energiedichte:

$$f_0 = - \int_p \ln \left\{ \tilde{\Delta}_{\text{FP}}(p) \text{Det} [\Delta_G^{-1}(p)] \right\} . \quad (2.53)$$

Durch den Faddeev-Popov Beitrag wird dieser Term unabhängig von der gewählten Eichfixierung.

Um die freie Energiedichte bei endlicher Temperatur T zu berechnen muß diese noch durch Subtraktion des Vakuum-Beitrags ($T = 0$) normiert werden. Für die Berechnung der Impulssummen wurde wieder der Limes unendlichen räumlichen Volumens gewählt, d.h. $(N_\sigma = \infty, N_\tau < \infty)$ für die $T \neq 0$ Beiträge und $(N_\sigma = \infty, N_\tau = \infty)$ für die $T = 0$ Beiträge. Die dadurch erhaltenen Impuls-Integrale und Summen wurden numerisch berechnet.

Da die Cut-off-Effekte für kleine N_τ besonders drastisch sind, vergleichen wir den Hochtemperatur-Limes der freien Energiedichte für verschiedene Wirkungen bei festem $N_\tau = 4$. Wir betrachten dazu neben der Standard Wilson-Wirkung, verbesserte Wirkungen, die den Plaquette-Term und den 1×2 Term enthalten sowie verbesserte

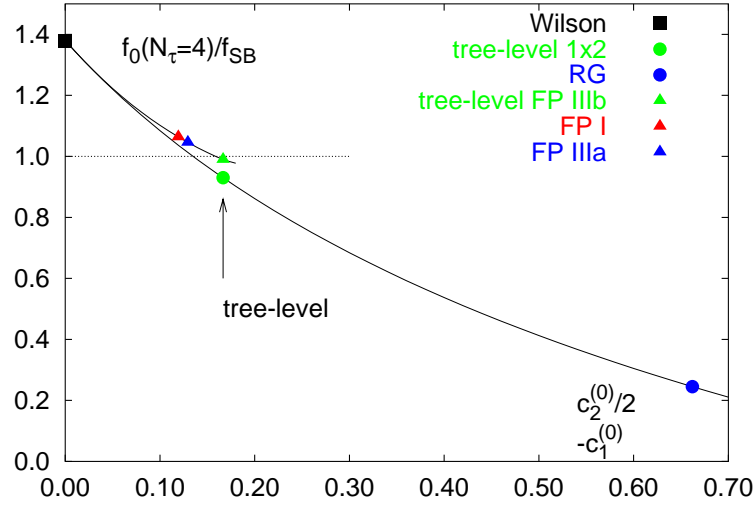


Abbildung 2.3: Freie Energiedichte im Hochtemperatur-Limes, f_0 , bei $N_\tau=4$ normiert auf den Stefan-Boltzmann Wert f_{SB} für die Standard Wilson-Wirkung (Wilson), die tree-level-verbesserte Wirkung $S^{(1,2)}$ (tree-level 1×2), die Iwasaki-Wirkung (RG) und die Fixpunkt-Wirkungen vom Typ I (FP I), Typ IIIa (FP IIIa) und Typ IIIb (FP IIIb) als Funktion der Koeffizienten $c_1^{(0)}$ bzw. $c_2^{(0)}$.

Wirkungen, die den Plaquette-Term und den Würfel-Term enthalten. Da diese beiden Typen verbesserter Wirkungen nur zwei Operatoren enthalten, ergibt sich aus der Normierungsbedingung 2.16 jeweils eine 1-Parameter-Schar von Wirkungen, für die die freien Energiedichte bei $N_\tau = 4$ berechnet wurde.

In Abbildung 2.3 ist $f_0(N_\tau=4)/f_{\text{SB}}$ für diese beiden Scharen durch zwei kontinuierliche Linien dargestellt, die sich im Punkt der Standard Wilson-Wirkung treffen. Im Parameter-Raum, der durch Plaquette und 1×2 Term aufgespannt wird, liegen die tree-level- (bzw. on-shell-) verbesserte Wirkung $S^{(1,2)}$ sowie die Iwasaki-Wirkung; in dem durch Plaquette und Würfel-Term aufgespannten Parameter-Raum die Fixpunkt-Wirkungen vom Typ I, IIIa und IIIb. Die Fixpunkt-Wirkung IIIb erfüllt die On-shell-Tree-level-Bedingung 2.23. Die x -Achse wurde so skaliert, daß die beiden tree-level-verbesserten Wirkungen übereinander liegen.

Es zeigt sich, daß die tree-level-verbesserten Wirkungen wie auch die Fixpunkt-Wirkungen die Cut-off-Effekte im Vergleich zur Standard Wilson-Wirkung stark reduzieren. Vergleicht man diese untereinander, so führt die Tree-level-Fixpunkt-Wirkung (Typ IIIb) zu den geringsten Abweichungen vom Stefan-Boltzmann Wert für das ideale Gas. Aus dem Rahmen fällt die Iwasaki-Wirkung, welche sogar deutlich größere Abweichungen als die Standard Wirkung aufzeigt. Eine mögliche Ursache dafür ist wohl die Tatsache, daß die Wirkung für einen endlichen β -Wert, weit entfernt vom Hochtemperatur-Limes ($\beta \rightarrow \infty$) verbessert wurde.

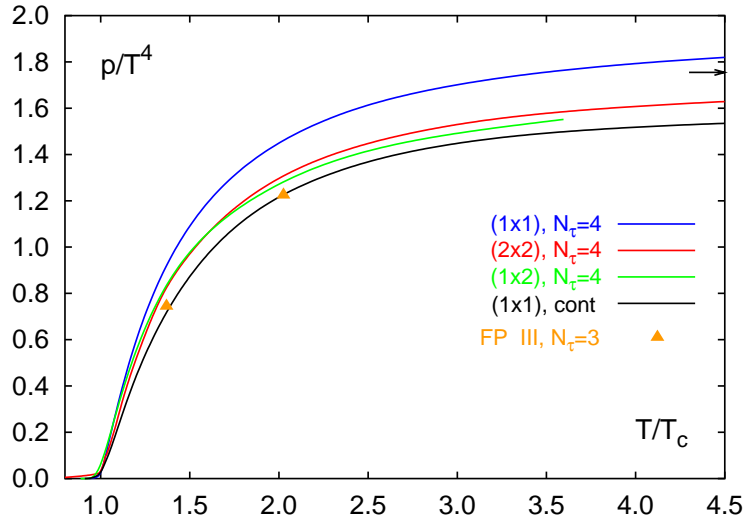


Abbildung 2.4: Druck p für Standard Wilson-Wirkung (blau), die tree-level-verbesserten Wirkungen $S^{(1,2)}$ (grün) und $S^{(2,2)}$ (rot) bei $N_\tau=4$ sowie eine Fixpunkt-Wirkung bei $N_\tau=3$ (orange) im Vergleich zur Kontinuum-Extrapolation für die Standard Wilson-Wirkung (schwarz). Der Pfeil markiert den Stefan-Boltzmann Wert.

Monte-Carlo Resultate

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, führen tree-level-verbesserte Wirkungen und Fixpunkt-Wirkungen zu starken Verringerungen der Cut-off-Effekte im Hochtemperatur-Limes. Um zu sehen in wie weit sich diese Verbesserungen auch in der Thermodynamik bei endlichen β -Werten zeigen, ist es notwendig eine thermodynamische Größe in einer Monte-Carlo Simulation zu bestimmen.

Abbildung 2.4 zeigt den Druck p für Standard Wilson Wirkung [2], die tree-level-verbesserten Wirkungen $S^{(1,2)}$ [29] und $S^{(2,2)}$ [3] bei $N_\tau=4$ sowie eine Fixpunkt-Wirkung (Typ IIIa) bei $N_\tau=3$ [4] im Vergleich zur Kontinuum-Extrapolation für die Standard Wilson Wirkung, die aus den Druck-Verläufen für $N_\tau=4, 6$ und 8 gewonnen wurde [2]. Die Standard Wirkung bei $N_\tau=4$ weist große Abweichungen von der Kontinuum-Extrapolation auf, die für die tree-level-verbesserten Wirkungen auch bei Temperaturen nahe T_c drastisch reduziert sind. Eine Erklärung dafür liefert folgendes Argument: Bei hohen Temperaturen verändert sich p/T^4 nur langsam mit der Temperatur und strebt gegen den idealen Gas Limes. Thermodynamische Observable wie der Druck sind deshalb auch bei endlichem β sehr sensitiv gegenüber der korrekten Wiedergabe des idealen Gas Limes durch das Diskretisierungsschema. Für die Fixpunkt-Wirkung findet man sogar bei $N_\tau=3$ eine exzellente Übereinstimmung mit der Kontinuum-Extrapolation.

Kapitel 3

Verbesserte Staggered Fermionwirkungen

Bevor in Kapitel 4 die Konstruktion von staggered Fermionwirkungen mit verbesserter Rotationssymmetrie diskutiert wird, sollen in diesem Kapitel als Vorbereitung zwei Aspekte bei der Verbesserung von staggered Fermionwirkungen betrachtet werden, die mit zwei verschiedenen Gitterartefakten zusammenhängen, welche mit der Standard Kogut-Susskind Wirkung auftreten.

Zum einen führt die Kogut-Susskind Wirkung zu ultraviolett Cut-off-Effekten. Zunächst soll diskutiert werden, daß diese Cut-off-Effekte von $\mathcal{O}(a^2)$ sind. Um diese zu reduzieren, wird das Programm der On-shell-Verbesserung analog zum Fall der on-shell-verbesserten Eichwirkungen im Abschnitt 2.1 auf die staggered Fermionwirkung angewandt. Dazu soll eine systematische Untersuchung der zu einer $\mathcal{O}(a^2)$ verbesserten staggered Wirkung beitragenden Operatoren, die von Y. Luo durchgeführt wurde dargestellt werden.

Der andere Aspekt ist die Brechung der Flavour-Symmetrie, d.h. die Vermischung der Flavourfreiheitsgrade durch die Eichwechselwirkung bei endlichem Gitterabstand a , die in Abschnitt 1.4 angesprochen wurde. Die Reduzierung dieser Flavour-Symmetrie-Brechung durch die Einführung sogenannter Fat-Links soll in Abschnitt 3.2 diskutiert werden.

3.1 On-Shell-Verbesserung nach Luo

Verbesserte Fermionfelder

In Abschnitt 1.4 wurde gezeigt, daß die Kogut-Susskind Wirkung die Kontinuum-Wirkung im naiven Kontinuum-Limes reproduziert, wenn man die Gitter-Wirkung in Quark-Feldern, q , umschreibt, welche Linearkombinationen der einkomponentigen χ -Felder eines Hyperkubus sind (vergl. Gleichung 1.42). Dabei treten Korrekturen von $\mathcal{O}(a)$ auf. Man kann jedoch zeigen, daß diese Korrekturen nicht auf die Formulierung der Kogut-Susskind Wirkung zurückgehen, sondern vielmehr durch die “unzureichende” Darstellung der Kontinuum-Fermionfelder durch q -Felder verursacht werden [30, 31]. Durch eine Verbesserung dieser Felder gelingt es, die $\mathcal{O}(a)$ Korrekturen zu beseitigen, so daß die Kogut-Susskind Wirkung von vorneherein nur Cut-off Korrekturen von $\mathcal{O}(a^2)$ aufzeigt.

Um dies zu sehen ist es sinnvoll, die Wirkung in den hyperkubischen Feldern $\chi_\xi(y)$ zu schreiben, die in 1.33 definiert wurden. Wir definieren dazu die eichkovarianten hyperkubischen Fermionfelder

$$\phi_\xi(y) \equiv \tilde{U}_\xi(y)\chi_\xi(y) \quad , \quad (3.1)$$

$$\bar{\phi}_\xi(y) \equiv \bar{\chi}_\xi(y)\tilde{U}_\xi^\dagger(y) \quad , \quad (3.2)$$

wobei die $\tilde{U}_\xi(y)$ wie in Definition 1.40 das Produkt von Linkvariablen entlang eines Pfades von y nach $y + \xi$ sind und definieren die hyperkubischen Matrizen

$$\overline{(\gamma_S \otimes t_F)}_{\xi\xi'} \equiv \frac{1}{4} \text{Tr} \left(\gamma^{\xi^\dagger} \gamma_S \gamma^{\xi'} \gamma_F^\dagger \right) \quad . \quad (3.3)$$

Damit erhält man die Zerlegung der Wirkung nach Termen unterschiedlicher Dimension

$$S_F^{(KS)} = \mathcal{O}_4 + a\mathcal{O}_5 + a^2\mathcal{O}_6 + \mathcal{O}(a^7) \quad (3.4)$$

mit

$$\mathcal{O}_4 = (2a)^4 \sum_y \sum_{\xi, \xi'} \bar{\phi}_\xi(y) \left[\sum_\mu \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} D_\mu^L + m \overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} \right] \phi_{\xi'}(y) \quad (3.5)$$

und

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_5 = & (2a)^4 \sum_y \sum_{\xi, \xi'} \bar{\phi}_\xi(y) \left[- \sum_\mu \overline{(\gamma_5 \otimes t_{5\mu})}_{\xi\xi'} \Delta_\mu^L \right. \\ & \left. + \sum_{\mu, \nu} \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} \xi_\nu \frac{1}{2a^2} \left[\begin{array}{c} \square \\ \mu\nu \end{array} (y) - \left(\begin{array}{c} \square \\ \mu\nu \end{array} \right)^\dagger (y) \right] \right] \phi_{\xi'}(y) \quad , \quad (3.6) \end{aligned}$$

wobei die kovarianten Ableitungen auf dem Gitter definiert sind durch

$$D_\mu^L \chi_\xi(y) = \frac{1}{4a} \left[U_\mu(y + \xi) U_\mu(y + \xi + \hat{\mu}) \chi_\xi(y + 2\hat{\mu}) - U_\mu^\dagger(y + \xi - \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(y + \xi - 2\hat{\mu}) \chi_\xi(y - 2\hat{\mu}) \right] , \quad (3.7)$$

$$\Delta_\mu^L \chi_\xi(y) = \frac{1}{4a^2} \left[U_\mu(y + \xi) U_\mu(y + \xi + \hat{\mu}) \chi_\xi(y + 2\hat{\mu}) + U_\mu^\dagger(y + \xi - \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(y + \xi - 2\hat{\mu}) \chi_\xi(y - 2\hat{\mu}) - 2\chi_\xi(y) \right] . \quad (3.8)$$

Aus der Definition 3.3 folgt ein einfacher Zusammenhang zwischen bilinearen Ausdrücken in den ϕ -Feldern und den q -Feldern, $\overline{\phi(\gamma_S \otimes t_F)} \phi = \bar{q}(\gamma_S \otimes \gamma_F) q$. Führt man nun also den naiven Kontinuum-Limes aus, entwickelt man also die Linkvariablen in Ordnungen a , so findet man, daß die Terme \mathcal{O}_4 bzw. \mathcal{O}_5 in führender Ordnung mit den Entwicklungskoeffizienten der Ordnungen a^4 bzw. a^5 der Wirkung in den q -Felder 1.42 übereinstimmen. Die Korrekturen sind jeweils von $\mathcal{O}(a^2)$.

Der Operator der Dimension 5 ist redundant in dem Sinne, daß er beseitigt wird, wenn man die folgenden verbesserten Fermionfelder einführt:

$$\begin{aligned} \chi_\xi^I(y) &= \left[1 - a \sum_\nu \xi_\nu D_\nu^L \right] \chi_\xi(y) , \\ \bar{\chi}_\xi^I(y) &= \bar{\chi}_\xi(y) \left[1 - a \sum_\nu \xi_\nu \overleftarrow{D}_\nu^L \right] . \end{aligned} \quad (3.9)$$

In den verbesserten Feldern ist dann die Wirkung

$$S_F^{(KS)} = (2a)^4 \sum_y \sum_{\xi, \xi'} \bar{\phi}_\xi^I(y) \left[\sum_\mu \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} D_\mu^L + m \overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} \right] \phi_{\xi'}^I(y) + a^2 \mathcal{O}'_6 . \quad (3.10)$$

Man kann darüber hinaus zeigen, daß die Wirkung mit diesen verbesserten Fermionfeldern keine Korrekturen der Ordnung ag^{2n} für alle $n \in \mathbb{N}$ hat. Dies folgt daraus, daß, wenn es beispielsweise Korrekturen der Ordnung ag^2 gäbe, man notwendig einige Operatoren der Dimension 5 addieren können müßte, $a \sum_i c_i g^2 \mathcal{O}_i^{(5)}$, die invariant unter den Gitter-Symmetrietransformationen sind und die die Ordnung ag^2 Korrekturen aufheben [16, 17, 30]. Man kann nun aber zeigen, daß es keinen Operator der Dimension 5 gibt, der invariant unter der Gitter-Symmetriegruppe (Rotationen, Achsen-Reflexionen, Translationen, $U(1) \otimes U(1)$ und Ladungskonjugation) ist [31].

Das bedeutet, daß physikalische Größen, die nur von der Form der Wirkung abhängen (z.B. Teilchenmassen, die aus Korrelationsfunktionen bestimmt werden, und thermodynamische Größen wie Energiedichte oder Druck), *keine* Korrekturen von Ordnung ag^{2n} haben.

On-shell-Verbesserung

Wie in Abschnitt 2.1 über die On-shell-Verbesserung der Eichwirkung dargestellt, muß man, um die Wirkung systematisch in Ordnungen $a^2 g^{2n}$ in Bezug auf physikalische On-shell-Größen zu verbessern, sämtliche Operatoren der Dimension 6 klassifizieren, die die Gitter-Symmetrien besitzen. Dies ist von Y. Luo für die staggered Fermion-Formulierung durchgeführt worden [7].

Insgesamt gibt es 7 bilineare Fermionoperatoren (\mathcal{B}_i) und 18 Vier-Fermionoperatoren (\mathcal{F}_i), die als Skalare unter der Gitter-Symmetriegruppe transformieren. Die exakten Definitionen der folgenden Operatoren sind in Anhang B angegeben.*

Fünf der bilinearen Operatoren sind invariant unter der vollen Symmetrie-Gruppe einschließlich der $U_A(1)$:

$$\mathcal{B}_1 = \bar{\chi} \mathcal{D}^3 \chi , \quad (3.11)$$

$$\mathcal{B}_2 = \bar{\chi} \frac{1}{2} (\mathcal{D}^2 \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{D}^2) \chi , \quad (3.12)$$

$$\mathcal{B}_3 = \bar{\chi} \frac{1}{2} (\mathcal{D}^2 \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{P}^3) \chi , \quad (3.13)$$

$$\mathcal{B}_4 = \bar{\chi} \frac{1}{2} (\mathcal{D}^2 \mathcal{P} - \mathcal{P} \mathcal{D}^2 - 2\mathcal{D} \mathcal{P} \mathcal{D}) \chi , \quad (3.14)$$

$$\mathcal{B}_5 = \bar{\chi} \mathcal{P}^3 \chi . \quad (3.15)$$

Für den Fall $m \neq 0$ ist die $U_A(1)$ Symmetrie verletzt. Es gibt zwei weitere bilineare Fermionoperatoren, die invariant unter der Symmetrie-Gruppe außer der $U_A(1)$ sind:

$$\mathcal{B}_6 = m \bar{\chi} \mathcal{P}^2 \chi , \quad (3.16)$$

$$\mathcal{B}_7 = m \bar{\chi} \mathcal{D}^2 \chi . \quad (3.17)$$

Die Vier-Fermionoperatoren können in 4 Gruppen eingeteilt werden. Die erste Gruppe besteht aus einem Operator:

$$\mathcal{F}_1 = \sum_{x,a} \bar{\chi}(x) T^a \chi(x) \sum_e \bar{\chi}(x+e) T^a \chi(x+e) , \quad (3.18)$$

*Aus Gründen der kompakteren Schreibweise wird hier folgende Konvention zugrundegelegt: In den bilinearen Operatoren bezeichnet χ ein hyperkubisches Feld $\chi_\xi(y)$ wogegen in den Vier-Fermionoperatoren χ ein ursprüngliches 1-Komponenten-Feld auf dem feinen Gitter $\chi(x)$ bezeichnet.

wobei T^a die Generatoren der $SU(N_c)$ bezeichnet und e die 8 möglichen Gitter-Verschiebungen der Länge 1 bezeichnet. Die zweite Gruppe besteht ebenfalls aus einem Operator:

$$\mathcal{F}_2 = \sum_{x,a} \bar{\chi}(x) T^a \chi(x) \sum_v \bar{\chi}(x+v) T^a \chi(x+v) , \quad (3.19)$$

wobei v die 32 möglichen Gitter-Verschiebungen der Länge $\sqrt{3}$ bezeichnet. Die dritte Gruppe besteht aus 8 Operatoren:

$$\mathcal{F}_i = \sum_{x,a} \sum_{\mu} C_{\mu}^a(x) \frac{1}{256} \sum_c w(c) \eta_5(c) P_{\mu}^{(i)}(c) C_{\mu}^a(x+c) , \quad i = 3, \dots, 10 , \quad (3.20)$$

wobei c die 32 möglichen Gitter-Verschiebungen mit Koordinaten $c_{\mu} = -1, 0, 1$ bezeichnet und das Gewicht durch $w(c) = \prod_{\mu} (2 - |c_{\mu}|)$ definiert ist. Die bilinearen Fermionoperatoren sind definiert durch

$$C_{\mu}^a(x) = \bar{\chi}(x) T^a \sum_{v=\hat{\mu}} \chi(x+v) . \quad (3.21)$$

Die letzte Gruppe besteht ebenfalls aus 8 Operatoren:

$$\mathcal{F}_i = \sum_{x,a} \sum_{\mu} \mathcal{E}_{\mu}^a(x) \frac{1}{256} \sum_c w(c) P_{\mu}^{(i)}(c) \mathcal{E}_{\mu}^a(x+c) , \quad i = 11, \dots, 18 , \quad (3.22)$$

mit den bilinearen Fermionoperatoren

$$\mathcal{E}_{\mu}^a(x) = \frac{1}{2} [\bar{\chi}(x) T^a \chi(x + \hat{\mu}) + \bar{\chi}(x) T^a \chi(x - \hat{\mu})] . \quad (3.23)$$

Die Phasenfaktoren $P_{\mu}^{(i)}(c)$ sind in Anhang B definiert.

Die allgemeine on-shell-verbesserte Wirkung kann also geschrieben werden

$$S_F = S_F^{(KS)} + a^2 \sum_{i=1}^7 b_i(g^2, m) \mathcal{B}_i + a^2 \sum_{i=1}^{18} b'_i(g^2, m) \mathcal{F}_i + \mathcal{O}(a^3) . \quad (3.24)$$

Damit die Wirkung reell ist, muß b_2 rein imaginär und alle anderen b_i und b'_i reell sein.

Isospektrale Transformationen

Analog zur Vorgehensweise bei den on-shell-verbesserten Eichwirkungen, kann man die Wirkung vereinfachen, indem man die Anzahl der Operatoren durch isospektrale Transformationen der Fermion- und der Eichfelder minimiert.

Die allgemeinste Transformation der Fermionfelder, welche ihre Transformationseigenschaften unter der Gitter-Symmetriegruppe bewahrt, ist

$$\chi \rightarrow (1 + a^2 \epsilon_1 m \mathcal{D} + a^2 \epsilon_2 \mathcal{D}^2 + a^2 \epsilon_3 \mathcal{D}^2) \chi, \quad (3.25)$$

$$\bar{\chi} \rightarrow \bar{\chi} \left(1 + a^2 \epsilon'_1 m \overleftarrow{\mathcal{D}} + a^2 \epsilon'_2 \overleftarrow{\mathcal{D}}^2 + a^2 \epsilon'_3 \overleftarrow{\mathcal{D}}^2 \right). \quad (3.26)$$

Nach einer Reskalierung des Massenparameters, $m' = m(1 - a^2 m^2 (\epsilon_1 - \epsilon'_1))$, ergibt sich damit in führender Ordnung der ϵ_i 's und a^2 folgende Änderung der Wirkung:

$$\begin{aligned} \Delta S_F = & (\epsilon'_3 - \epsilon_3) \mathcal{B}_2 + (\epsilon'_3 + \epsilon_3) \mathcal{B}_3 + (\epsilon'_2 + \epsilon_2 + \epsilon'_3 + \epsilon_3) \mathcal{B}_5 \\ & + (\epsilon_1 - \epsilon'_1 + \epsilon_2 + \epsilon'_2) \mathcal{B}_6 + (\epsilon_3 + \epsilon'_3) \mathcal{B}_7 - \mathcal{O}(a^3). \end{aligned} \quad (3.27)$$

Damit die transformierte Wirkung reell ist muß außerdem gelten: $\epsilon'_3 = \epsilon_3^*$, $(\epsilon_2 + \epsilon'_2)$ reell und $(\epsilon_1 - \epsilon'_1)$ reell.

Durch geschickte Wahl der ϵ_i 's ist es also beispielsweise möglich,

$$b_2(g^2, m) = b_3(g^2, m) = b_5(g^2, m) = b_6(g^2, m) = 0 \quad (3.28)$$

zu erreichen, denn dieses Argument kann man analog zum Fall der Eichwirkung in jeder Ordnung g^2 anführen.

Die Koeffizienten der on-shell-verbesserten Eich- und Fermionwirkungen sind nicht unabhängig von einander. So führt die isospektrale Transformation der Eichfelder 2.20 auch zu einem Wechsel der Koeffizienten der Fermionwirkung. In niedrigster Ordnung ϵ findet man:

$$\Delta S_F = \frac{\epsilon}{2} \mathcal{B}_4 + \mathcal{O}(a^3). \quad (3.29)$$

Wie in Abschnitt 2.1 dargestellt, wurde gezeigt, daß diese isospektrale Eichfeldtransformation für eine bestimmte Wahl von ϵ erlaubt, den Koeffizienten $c_3(g^2)$ der Eichwirkung in allen Ordnungen Störungstheorie gleich Null zu setzen. Aus Gleichung 3.29 folgt nun, daß mit dieser speziellen Wahl für ϵ der Koeffizient $b_4(g^2, m)$ im allgemeinen nicht verschwindet. Man kann aber ϵ auch so wählen, daß $b_4(g^2, m) = 0$, dann ist aber im allgemeinen $c_3(g^2) \neq 0$.

Um die möglichen redundanten Vier-Fermionoperatoren zu bestimmen, betrachtet man infinitesimale Änderungen der Linkvariablen:

$$\delta U_\mu(x) = i \epsilon_{ab}(x+c) \text{Re} [t^\alpha U_\mu(x+\xi)]_{ab} t^\alpha U_\mu(x), \quad (3.30)$$

$$\delta U_\mu^\dagger(x) = -i \epsilon_{ab}(x+c) \text{Re} [t^\alpha U_\mu(x+\xi)]_{ab} U_\mu^\dagger(x) t^\alpha, \quad (3.31)$$

mit

$$\epsilon_{ab}(x+c) = a^3 \sum_{i=11}^{18} \epsilon'_i \eta_\mu(x) P_\mu^i(c) \bar{\chi}^a(x+c) \chi^b(x+c+\mu). \quad (3.32)$$

Mit diesen Transformationen kann man dann zeigen, daß man folgende Terme addieren kann, ohne das Pfadintegral bis $\mathcal{O}(a^3)$ zu ändern:

$$\Delta S_F = \frac{a^2}{2} \sum_{i=11}^{18} \epsilon'_i \mathcal{F}_i + a^2 \epsilon'_{11} \mathcal{B}_4 + \mathcal{O}(a^3) \quad . \quad (3.33)$$

Offensichtlich kann man also die ϵ'_i so wählen, daß gilt:

$$b'_i(g^2, m) = 0, \quad i = 11, \dots, 18 \quad . \quad (3.34)$$

Dadurch erfährt der Koeffizient des Operators \mathcal{B}_4 eine entsprechende Änderung. Weitere Vier-Fermionoperatoren kann man nicht beseitigen.

Es läßt sich also folgendes Fazit ziehen: In einer on-shell-verbesserten staggered Wirkung (Eich- und Fermionteil) gibt es 15 freie Parameter, $c_1(g^2)$ und $c_2(g^2)$ im Eichteil, $b_1(g^2, m)$, $b_4(g^2, m)$ und $b_7(g^2, m)$ für die bilinearen Beiträge zum Fermion-Teil und $b'_1(g^2, m), \dots, b'_{10}(g^2, m)$ für die Vier-Fermionbeiträge zum Fermion-Teil; alternativ zu $b_4(g^2, m)$ kann man auch $c_3(g^2)$ berücksichtigen.

Tree-level-Lösung

Die Koeffizienten der on-shell-verbesserten Wirkung wurden in [7] in Tree-Level berechnet. Man betrachtet dazu die Kogut-Susskind Wirkung in den verbesserten Fermionfeldern, die in 3.9 definiert wurden:

$$S_F^{(KS)} \xrightarrow{a \rightarrow 0} (2a^4) \sum_y \sum_{\xi, \xi'} \bar{\phi}_\xi(y) \left\{ \sum_\mu \overline{(\gamma_\mu \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} \left[D_\mu + \frac{a^2}{6} D_\mu^3 \right] + m \overline{(\mathbb{1} \otimes \mathbb{1})}_{\xi\xi'} \right\} \phi_{\xi'}(y) + \mathcal{O}(a^3) \quad , \quad (3.35)$$

wobei D_μ die kovariante Ableitung im Kontinuum bezeichnet.

Die Korrektur von Ordnung a^2 wird durch den Operator \mathcal{B}_1 beseitigt, wenn

$$b_1(0, m) = -\frac{1}{6} \quad , \quad (3.36)$$

und alle anderen b_i und b'_i gleich Null. Dies ist die sogenannte Naik-Wirkung, die S. Naik vor mehr als 10 Jahren vorschlug, um $\mathcal{O}(a^2)$ Korrekturen zu beseitigen [32]. Seine Untersuchungen waren auf der Dirac-Kähler-Gleichung basiert; diese Fermion-Formulierung stimmt im freien Fall mit der Kogut-Susskind Formulierung der staggered Fermionen überein.

3.2 Verbesserung der Flavour-Symmetrie – Fat-Links

Wie in Abschnitt 1.4 diskutiert, ist die volle chirale $SU_A(n_f) \otimes SU_V(n_F)$ Symmetrie in der staggered Fermion-Formulierung auf eine $U_A(1) \otimes U_V(1)$ reduziert. Die Ursache dafür ist ein Term in der Wirkung von $\mathcal{O}(a)$, der die Flavoursymmetrie für die $n_F = 4$ Flavour explizit bricht.

Im Kontinuum-Limes dieser Theorie erwartet man durch den Mechanismus der spontanen Symmetrie-Brechung im Limes $m \rightarrow 0$ die Existenz vier masseloser Goldstone Pionen, die sich nur durch ihren Flavourgehalt unterscheiden. Diese Pionen entsprechen den vier Operatoren[†]

$$\sum_x \bar{\chi}(x)\chi(x) \quad , \quad (3.37)$$

$$\sum_x \eta_4(x)\bar{\chi}(x)\chi(x) \quad , \quad (3.38)$$

$$\sum_x \varepsilon(x)\bar{\chi}(x)\zeta_i\Delta_i\chi(x) \quad , \quad (3.39)$$

$$\sum_x \eta_4(x)\varepsilon(x)\bar{\chi}(x)\zeta_i\Delta_i\chi(x) \quad , \quad (3.40)$$

wobei $\Delta_i\chi(\vec{x}, t) \equiv 1/2[\chi(\vec{x} + \hat{i}, t) - \chi(\vec{x} - \hat{i}, t)]$. Die Phasen $(\eta, \zeta, \varepsilon)$ sind in Anhang B definiert. Eine vollständige Klassifizierung der staggered Mesonoperatoren findet man in [33].

Bei endlichem Gitterabstand a wird nur das Pion 3.38 im Limes verschwindender Quarkmasse ($m \rightarrow 0$) masselos, die anderen bleiben massiv. Dieses Goldstone-Pion soll mit π bezeichnet werden. Stellvertretend für die nicht-Goldstone Pionen soll das Pion, das dem lokalen Operator 3.37 entspricht, betrachtet werden; wir bezeichnen dieses mit π_2 .

Bei einem typischen Gitterabstand von ~ 0.2 fm ist die Flavour-Symmetrie-Brechung recht groß. Im chiralen Limes ($m \rightarrow 0$) findet man $m_{\pi_2}^2/m_\rho^2 \approx 0.5$ und nicht Null, wobei m_ρ die Masse des ρ -Mesons ist. Da in der realen Welt $m_{\pi_2}^2/m_\rho^2 \approx 0.03$ ist, besteht die Notwendigkeit, die diesen Gitterartefakt zu reduzieren.

Um eine Idee zu erhalten, wie man diese Flavour-Symmetrie-Brechung reduzieren kann, betrachten wir noch einmal die Flavour-Interpretation der staggered Fermionwirkung. Die folgenden Argumente sind nicht rigoros, sondern sollen eher ein anschauliches Bild der Flavour-Symmetrie-Brechung liefern; sie stammen von J.-F.

[†]Nur die Operatoren 3.38 und 3.39 stellen reine Pion-Zustände dar. Der Operator 3.37 ist eine Überlagerung von Pion und f_0 Meson, der Operator 3.40 eine Überlagerung von Pion und a_0 Meson.

Lagaë und D.K. Sinclair [34].

Wie gezeigt, kann man die Flavour- und Dirac-Komponenten eines staggered Quarkfeldes als Linearkombination der χ -Felder eines Hyperkubus darstellen. Diese Komponenten sind aber in der wechselwirkenden Theorie mit Eichfeldern verbunden, welche eine Mischung verschiedener Flavour-Freiheitsgrade induzieren.

Andererseits entsprechen die 4 Flavour- und 4 Dirac-Komponenten eines staggered Fermions den 16 Polen des freien Fermionpropagators. Für masselose Quarks sind diese an den Stellen $p_\mu = 0, \pi$. Man kann also die Mischung der Flavour bei schwacher Kopplung g in höheren Ordnungen a unterdrücken, wenn man die Kopplung an Gluonen, welche die Umgebung eines dieser Pole mit einem anderen verbinden, unterdrückt. Genauer gesagt sollte man die Kopplung an Gluonen mit Impulskomponenten 0 oder π , aber nicht alle gleich Null unterdrücken.

Um zu sehen, wie man dies erreichen kann, ignorieren wir zunächst der Einfachheit halber die Eichinvarianz. Die Kopplung zwischen Gluonen und Quarks wäre dann von der Form

$$i\chi^\dagger(n)A_\mu(n)\chi(n + \hat{\mu}) - h.c. \quad , \quad (3.41)$$

wobei “*h.c.*” für das hermitesch konjugierte des ersten Terms steht. Macht man nun die Substitution

$$A_\mu(n) \rightarrow \frac{1}{256} \left[\prod_{\nu=1}^4 (2 + D_\nu + D_{-\nu}) \right] A_\mu(n) \quad , \quad (3.42)$$

wobei $D_{\pm\nu}A_\mu(n) = A_\mu(n \pm \hat{\nu})$, so entspricht dies im Impulsraum der Substitution

$$A_\mu(k) \rightarrow \frac{1}{16} \left[\prod_{\nu=1}^4 (1 + \cos k_\nu) \right] A_\mu(k) \quad . \quad (3.43)$$

Die rechte Seite geht gegen $A_\mu(k)$ für $k \rightarrow 0$ mit Korrekturen von $\mathcal{O}(a^2)$ für $|k| \sim a$. Sie verschwindet, falls eine Komponente von k gleich π ist. Dies entspricht dem gewünschten Verhalten.

Kommen wir nun auf den eichinvarianten Fall zurück. Um die Transformation der A -Felder 3.42 auf die Linkvariablen zu übertragen, ersetzt man A_μ durch U_μ , multipliziert die Faktoren aus und ersetzt die Produkte von Verschiebungsoperatoren durch entsprechende symmetrisierte, kovariante Verschiebungsoperatoren. Dies führt auf eine Transformation von der Form

$$U_\mu \rightarrow \mathbf{U}_\mu = C \left\{ x_0 + 2y_0 + \sum_{\nu} [x_1 D_\nu + y_1 (D_{\mu\nu} - D_{-\mu\nu})] \right. \\ \left. + \sum_{\nu,\rho} [x_2 D_{\nu\rho} + y_2 (D_{\mu\nu\rho} - D_{-\mu\nu\rho})] + \sum_{\nu,\rho,\lambda} [x_3 D_{\nu\rho\lambda} + y_3 (D_{\mu\nu\rho\lambda} - D_{-\mu\nu\rho\lambda})] \right\} U_\mu \quad , \quad (3.44)$$

mit der Normierung $C = 1/(x_0 + 2y_0 + 6x_1 + 12y_1 + 12x_2 + 24y_2 + 8x_3 + 16y_3)$. Die Indizes ν , ρ und λ werden dabei über $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 4$ summiert, wobei $|\mu|, |\nu|, |\rho|, |\lambda|$ paarweise verschieden sind. Die Verschiebungsoperatoren erzeugen dabei Staples der Länge 1 in jeder der eingehenden Richtungen, z.B. ist

$$D_\nu U_\mu(n) = U_\nu(n)U_\mu(n + \hat{\nu})U_\nu^\dagger(n + \hat{\mu}) \quad . \quad (3.45)$$

Aus Gleichung 3.42 ergeben sich die Tree-level-Werte der Koeffizienten. Im schwachen Kopplungslimes $U_\mu \approx 1 + \mathbf{A}_\mu$ findet man für diese, daß $\mathbf{A}_\mu(k) = 0$ für $k_\mu = 0, \pi$, außer wenn $k = (0, 0, 0, 0)$, dann ist $\mathbf{A}_\mu = A_\mu$. Dies ist das gewünschte Verhalten.

Im allgemeinen, d.h. entfernt vom schwachen Kopplungslimes, sind die Koeffizienten x_i, y_i von g^2 abhängig und sollen als freie Parameter betrachtet werden, welche man in Hinblick auf eine reduzierte Flavour-Symmetrie-Brechung optimieren kann.

Verbesserte Links von dieser allgemeinen Form sind wegen ihrer Komplexität für Monte-Carlo Simulationen mit dynamischen Fermionen nicht geeignet, da man z.B. im Hybrid-Monte-Carlo Algorithmus die Ableitung der Wirkung nach sämtlichen Linkvariablen berücksichtigen muß, was hier zu einer enorm großen Zahl von Termen führen würde. Deshalb ist es sinnvoll sich auf eine einfache Unterklasse von verbesserten Links zu beschränken, in der man nur die eindimensionalen Staples zum 1-Link-Term addiert, d.h. also $x_0 = 1, x_1 = \omega$ und $x_2 = x_3 = y_0 = y_1 = y_2 = y_3 = 0$. Man ersetzt also den einfachen Link in der Wirkung durch einen sogenannten *Fat-Link*:

$$U_\mu \rightarrow U_\mu^{\text{fat}} = \frac{1}{1 + 6\omega} \left\{ U_\mu + \omega \sum_\nu D_\nu U_\mu \right\} \quad (3.46)$$

$$= \frac{1}{1 + 6\omega} \left\{ \begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \bullet \\ + \omega \sum_\nu \begin{array}{c} \bullet \longrightarrow \bullet \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ \bullet \longrightarrow \bullet \\ \bullet \longrightarrow \bullet \end{array} \end{array} \right\} \quad (3.47)$$

Dieser Fat-Link-Term ist auch in den im letzten Abschnitt betrachteten bilinearen Fermionoperatoren und zwar im Operator \mathcal{B}_6 enthalten.

Die Verbesserung der Flavorsymmetrie durch Fat-Links wurde von der MILC-Kollaboration vorgeschlagen [8]. Sie haben damit unter anderem das Massen-Splitting von π und π_2 auf quenched Konfigurationen, die mit der Standard Wilson-Plaquette-Wirkung bei $\beta = 5.85$ auf einem $20^3 \times 48$ Gitter erzeugt wurden, bei drei Massenparametern ($m = 0.01, 0.02, 0.033$) gemessen. Dabei wurden Werte für den Fat-Link-Parameter ω zwischen 0.0 und 0.4 gewählt. Bei diesen Messungen ist der Fat-Link nicht in der Dynamik berücksichtigt, da es sich ja um die quenched Approximation handelt. Vielmehr geht er in die Berechnung der Quarkpropagatoren ein

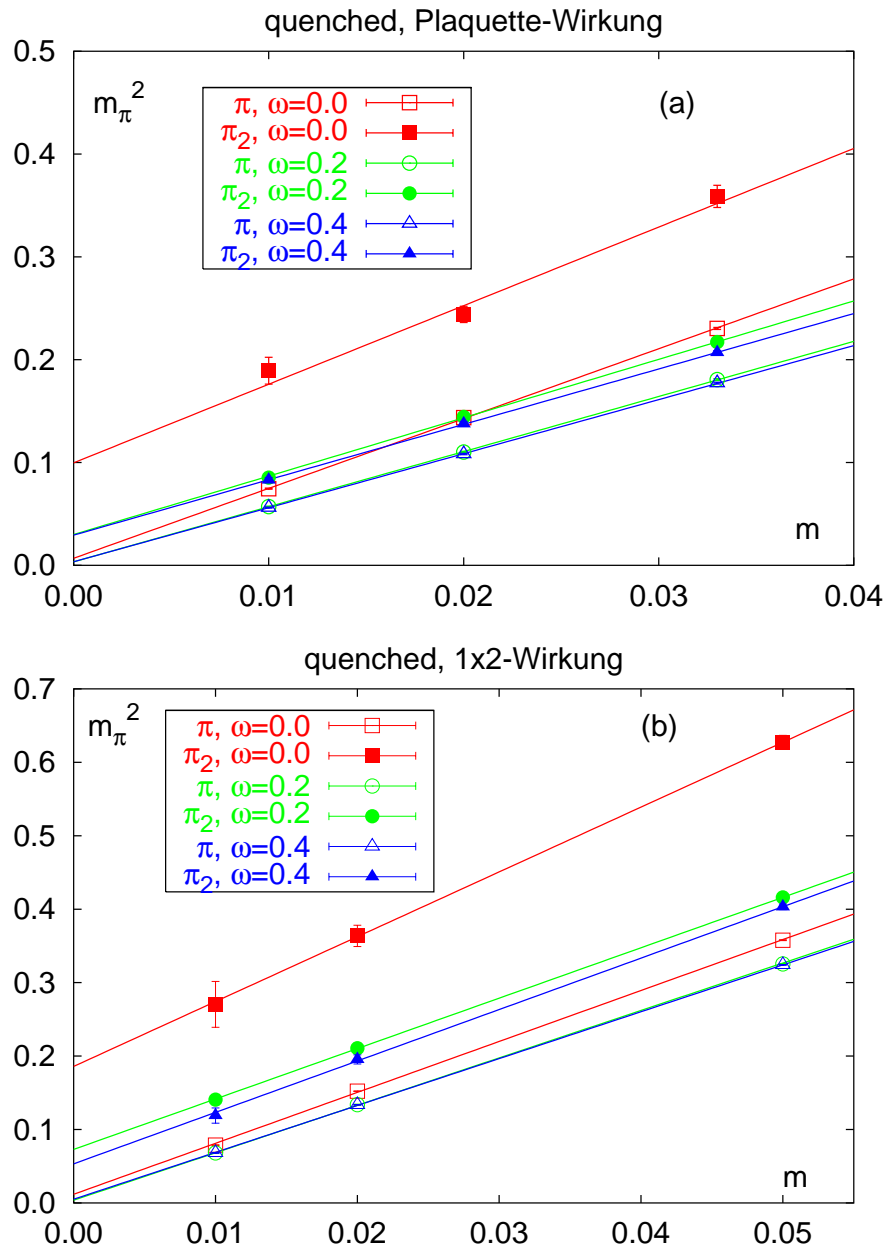


Abbildung 3.1: Massen des Goldstone Pions π und des nicht-Goldstone Pions π_2 für verschiedene Fat-Link-Parameter ω in Abhängigkeit der Quarkmasse m in Gittereinheiten. Die Massen wurden auf quenched Konfigurationen die mit der Standard Wilson-Plaquette-Wirkung (a) und mit der tree-level-verbesserten 1×2 -Wirkung (b) bei in etwa gleichem Gitterabstand erzeugt. Die Geraden sind an die Daten gefittet.

mit denen man die Operatoren 3.37 und 3.38 berechnet.

Wir haben die selben Pion-Operatoren zum Vergleich auf Konfigurationen, die auf einem $16^3 \times 30$ Gitter bei $\beta = 4.1$ mit der tree-level-verbesserten 1×2 -Wirkung ($S^{(1,2)}$) erzeugt wurden[‡], bei den Quarkmassen $m = 0.01, 0.02, 0.05$ für Fat-Link-Parameter $\omega = 0.0, 0.2, 0.4$ gemessen. Die Resultate dieser Messungen sind in Anhang D tabelliert.

Abbildung 3.1 (a) zeigt die beiden Pion-Massen quadratisch gegen die Quarkmasse m aufgetragen, die von der MILC-Kollaboration mit der Standard Wilson-Wirkung für $\omega = 0.0, 0.2, 0.4$ gemessen wurden, in Abhängigkeit von der Quarkmasse m in Gittereinheiten, Abbildung 3.1 (b) die entsprechenden Meßwerte für die 1×2 -Wirkung. Die Massen-Quadrate wurden mit einer Geraden gefittet. Man sieht, daß m_π in allen Fällen im chiralen Limes ($m \rightarrow 0$) gegen Null konvergiert, π ist also tatsächlich das Goldstone Pion. Die Masse des π_2 konvergiert dagegen gegen einen von Null verschiedenen Wert. Für beide Eichwirkungen zeigt sich eine deutliche Verringerung der Differenz zwischen den Massen-Quadraten des Goldstone und des nicht-Goldstone Pions für die fat-link-verbesserten Operatoren im Vergleich zu den unverbesserten Operatoren. Dabei ist festzustellen, daß die beiden Parameterwerte $\omega = 0.2, 0.4$ zu ähnlich guten Ergebnissen führen; lediglich im Fall der 1×2 -Wirkung ist die Differenz der Pionmassen-Quadrate für $\omega = 0.4$ um etwa 15% geringer als für $\omega = 0.2$.

Um wirklich Aussagen über die Qualität der Verbesserung durch Fat-Links machen zu können und die Ergebnisse für die verschiedenen Eichwirkungen und Fat-Link-Parameter vergleichbar zu machen ist es notwendig, die Differenz der Pionmassen in physikalischen Einheiten auszudrücken. Dazu betrachten wir die Masse des ρ -Mesons als Referenz-Skala und drücken die Massendifferenz in Einheiten der ρ -Masse m_ρ aus:

$$\Delta_\pi \equiv \frac{m_{\pi_2}^2 - m_\pi^2}{m_\rho^2} . \quad (3.48)$$

In Abbildung 3.2 ist Δ_π über m_π^2/m_ρ^2 für die beiden Eichwirkungen und die oben betrachteten ω -Werte aufgetragen. Dieser Plot bestätigt die Reduzierung der Flavour-Symmetrie-Brechung durch die Fat-Link-Verbesserung. Es fällt jedoch auf, daß das Pion-Splitting für die 1×2 -Wirkung für alle betrachteten Fat-Link-Parameter um etwa 40% größer ist als für die Standard Wirkung. Dennoch führt die Fat-Link-Verbesserung der Operatoren auch im Fall der 1×2 -Wirkung zu einem deutlich kleineren Pion-Splitting als die nicht verbesserten Operatoren im Fall der Standard Wilson-Wirkung.

[‡]Die β -Werte $\beta = 5.85$ für die Standard Wilson-Plaquette-Wirkung und $\beta = 4.1$ für die tree-level-verbesserte 1×2 -Wirkung entsprechen in etwa dem selben Gitterabstand a .

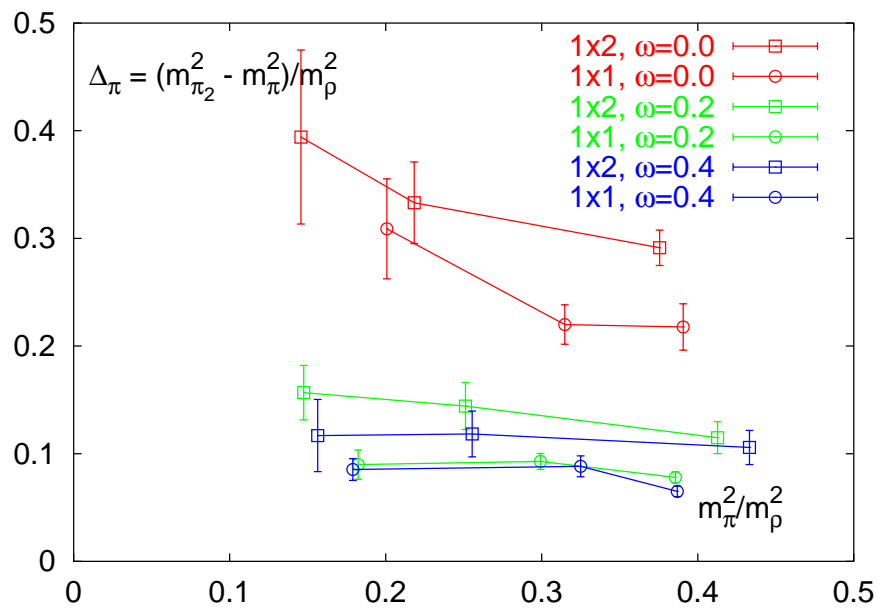


Abbildung 3.2: Pion-Splitting Δ_π über m_π^2/m_ρ^2 für die Standard Wilson-Wirkung (Kreise) und die tree-level-verbesserte 1×2 -Wirkung (Quadrate) jeweils für die Fat-Link-Parameter $\omega=0.0$ (rot), $\omega=0.2$ (grün) und $\omega=0.4$ (blau). Die Linien verbinden zusammengehörige Punkte und sind nur zur Orientierung gedacht.

Kapitel 4

Staggered Fermionwirkungen mit verbesserter Rotationssymmetrie bis $\mathcal{O}(g^2)$

Im ersten Teil dieses Kapitels sollen staggered Fermionwirkungen konstruiert werden, die sowohl in Bezug auf die ultraviolett Cut-off-Effekte als auch die Flavour-Symmetrie verbessert sind. Ein wichtiges Ziel ist dabei, eine Wirkung zu definieren, die sich auch für Monte-Carlo Rechnungen mit dynamischen Fermionen bei endlicher Temperatur eignet. Dazu soll die Rotationssymmetrie des Fermionpropagators in den Abschnitten 4.1 und 4.2 bis $\mathcal{O}(g^2)$ verbessert werden.

In Abschnitt 4.3 soll dann untersucht werden, in wie weit diese verbesserten Wirkungen zu einem verbesserten Hochtemperaturverhalten führen und was der Einfluß der Fat-Link-Verbesserung auf die Thermodynamik ist. In Abschnitt 4.4 wird vice versa der Einfluß der verbesserten Wirkungen auf die Flavour-Symmetrie diskutiert.

In Kapitel 2 wurde dargestellt, daß eine störungstheoretische Reduktion der Diskretisierungsfehler der Eichwirkung die Abweichungen vom idealen Gas-Limes im Hochtemperatur-Limes stark verringert. Darüber hinaus wurde gezeigt, daß diese störungstheoretisch verbesserten Eichwirkungen auch bei endlicher Temperatur, also endlicher Kopplung g , die Cut-off-Effekte in thermodynamischen Observablen drastisch reduzieren.

Daher liegt es nahe, auch die Fermionwirkung störungstheoretisch zu verbessern. Ideal wäre eine on-shell-verbesserte Wirkung, die bis zu einer gewissen Ordnung der Kopplung g^2 keine $\mathcal{O}(a^2)$ Korrekturen aufweist. Wie in den Abschnitten 2.1 und 3.1 diskutiert, benötigt man für eine on-shell-verbesserte Wirkung 2 zusätzliche Operatoren der Dimension 6 im Eichteil und 13 zusätzliche Operatoren der Dimension 6

im Fermionenteil, von denen 3 bilineare Operatoren und 10 Vier-Fermionoperatoren sind.

Für Monte-Carlo Simulationen mit dynamischen Fermionen ist eine solche Wirkung aber aus zwei Gründen ungeeignet. Erstens ist der numerische Aufwand im Vergleich zu Rechnungen in der reinen Eichtheorie, also in der quenched Approximation, um ein Vielfaches größer. Insbesondere bestimmt die Anzahl der in der Wirkung enthaltenen Links die Zahl der für den Update zu berechnenden Terme. Daher ist es wichtig, daß möglichst wenige und möglichst lokale Terme in der Wirkung stehen. Zweitens ist die Berücksichtigung von Vier-Fermionoperatoren in der Wirkung mit zusätzlichen Komplikationen verbunden. Sie können mit den bekannten Monte-Carlo Techniken nur simuliert werden, wenn man künstliche Yukawa-Felder einführt, um die Operatoren in eine bilineare Form umzuschreiben. Die resultierende Eich-Yukawa-Fermionwirkung ist außerordentlich kompliziert, sie hat z.B. Hermitezitäts-Eigenschaften, die vom Vorzeichen der Koeffizienten der ursprünglichen Vier-Fermionoperatoren abhängen.

Aus diesen Gründen werden wir eine staggered Fermionwirkung betrachten, die neben dem 1-Link Term der Kogut-Susskind Wirkung nur bilineare 3-Link-Terme enthält. Dabei werden wir in der naiven Formulierung arbeiten, da dies die störungstheoretische Entwicklung der Wirkung vereinfacht, auf der anderen Seite aber äquivalent zur Störungstheorie für die staggered Wirkung ist (genauere Erläuterungen folgen).

Dies setzt aber voraus, daß man die naive verbesserte Fermionwirkung spin-diagonalisieren kann und somit auch zu einer staggered Fermion-Formulierung mit ein-komponentigen χ -Feldern gelangen kann. Die verschiedenen Terme der Wirkung lassen sich aber nur dann simultan spin-diagonalisieren, wenn sie die Hyperkubenstruktur respektieren, d.h. die Wirkung darf im kinetischen Teil nur $\bar{\psi}$ -Felder mit ψ -Feldern verknüpfen, die um eine ungerade Anzahl von Gittereinheiten in Richtung der diskretisierten Ableitung und eine gerade Anzahl von Gittereinheiten in den dazu orthogonalen Richtungen verschoben sind.

Unser Ausgangspunkt ist also eine allgemeine Form einer naiven Fermionwirkung die neben dem 1-Link Term sämtliche 3-Link Terme enthält, welche die Hyperkubenstruktur respektieren, dies sind der Fat-Link-Term, der lineare 3-Link-Term und

der abgewinkelte 3-Link-Term:

$$\begin{aligned}
S_F = \sum_x \bar{\psi}(x) \sum_{\mu} \gamma_{\mu} \left\{ c_{1,0} \left[U_{\mu}^{\text{fat}}(x) \psi(x + \hat{\mu}) - U_{\mu}^{\text{fat}\dagger}(x - \hat{\mu}) \psi(x - \hat{\mu}) \right] \right. \\
+ c_{3,0} \left[U_{\mu}^{(3,0)}(x) \psi(x + 3\hat{\mu}) - U_{\mu}^{(3,0)\dagger}(x - 3\hat{\mu}) \psi(x - 3\hat{\mu}) \right] \\
+ c_{1,2} \sum_{\nu \neq \mu} \left[U_{\mu,\nu}^{(1,2)}(x) \psi(x + \hat{\mu} + 2\hat{\nu}) - U_{\mu,\nu}^{(1,2)\dagger}(x - \hat{\mu} - 2\hat{\nu}) \psi(x - \hat{\mu} - 2\hat{\nu}) \right. \\
\left. \left. + U_{\mu,\nu}^{(1,-2)}(x) \psi(x + \hat{\mu} - 2\hat{\nu}) - U_{\mu,\nu}^{(1,-2)\dagger}(x - \hat{\mu} + 2\hat{\nu}) \psi(x - \hat{\mu} + 2\hat{\nu}) \right] \right\} \\
+ m \sum_x \bar{\psi}(x) \psi(x) \quad , \quad (4.1)
\end{aligned}$$

wobei

$$\begin{aligned}
U_{\mu}^{(3,0)}(x) &= U_{\mu}(x) U_{\mu}(x + \hat{\mu}) U_{\mu}(x + 2\hat{\mu}) \quad , \\
U_{\mu,\nu}^{(1,2)}(x) &= \frac{1}{2} [U_{\mu}(x) U_{\nu}(x + \hat{\mu}) U_{\nu}(x + \hat{\mu} + \hat{\nu}) + U_{\nu}(x) U_{\nu}(x + \hat{\nu}) U_{\mu}(x + 2\hat{\nu})] \quad , \\
U_{\mu,\nu}^{(1,-2)}(x) &= \frac{1}{2} \left[U_{\mu}(x) U_{\nu}^{\dagger}(x + \hat{\mu} - \hat{\nu}) U_{\nu}^{\dagger}(x + \hat{\mu} - 2\hat{\nu}) \right. \\
&\quad \left. + U_{\nu}^{\dagger}(x - \hat{\nu}) U_{\nu}^{\dagger}(x - 2\hat{\nu}) U_{\mu}(x - 2\hat{\nu}) \right] \quad , \\
U_{\mu}^{\text{fat}}(x) &= \frac{1}{1 + 6\omega} \left\{ U_{\mu}(x) + \omega \sum_{\nu \neq \mu} [U_{\nu}(x) U_{\mu}(x + \hat{\nu}) U_{\nu}^{\dagger}(x + \hat{\mu}) \right. \\
&\quad \left. + U_{\nu}^{\dagger}(x - \hat{\nu}) U_{\mu}(x - \hat{\nu}) U_{\nu}(x + \hat{\mu} - \hat{\nu}) \right\} \quad .
\end{aligned}$$

Die beiden 3-Link-Terme sind in den von Luo klassifizierten bilinearen Operatoren (vergl. Abschnitt 3.1) enthalten. Der lineare 3-Link-Term entspricht dem Operator \mathcal{B}_1 , der abgewinkelte 3-Link-Term ist in den Operatoren \mathcal{B}_2 , \mathcal{B}_3 und \mathcal{B}_4 enthalten. Der Preis für diese relative einfache Struktur ist, daß es mit diesen Termen im allgemeinen nicht möglich ist, die $\mathcal{O}(a^2)$ Cut-off-Effekte in einer gegebenen Ordnung von g^2 vollständig zu beseitigen, also eine On-shell-Verbesserung durchzuführen. Wir benötigen daher ein Verbesserungskriterium, das weniger streng ist als die On-shell-Bedingung, aber dennoch allgemein genug, um auch in physikalischen Observablen zu Reduzierungen der Cut-off-Effekte zu führen.

Unser Ziel ist daher, die Rotationssymmetrie des Fermionpropagators bis zur 1-loop-Ordnung, d.h. bis einschließlich Ordnung g^2 , zu verbessern. Dazu parametrisieren wir die Abhängigkeit der Koeffizienten des Fat-Link-Terms, des linearen 3-Link-Terms

und des abgewinkelten 3-Link-Terms von der Kopplung g^2 wie folgt:

$$c_{i,j} = c_{i,j}^{(0)} + g^2 \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} c_{i,j}^{(2)}. \quad (4.2)$$

Die N_c -Abhängigkeit der 1-loop-Koeffizienten ist hier explizit ausfaktorisiert worden, so daß die $c_{i,j}^{(2)}$ unabhängig von der Eichgruppe sind.

Zusammen mit dem Fat-Link-Parameter ω gibt es also 7 Parameter in der Fermionwirkung. Um den korrekten naiven Kontinuum-Limes zu erhalten müssen die Koeffizienten die folgenden Normierungsbedingungen erfüllen:

$$c_{1,0}^{(0)} + 3 c_{3,0}^{(0)} + 6 c_{1,2}^{(0)} = 1/2, \quad (4.3)$$

$$c_{1,0}^{(2)} + 3 c_{3,0}^{(2)} + 6 c_{1,2}^{(2)} = 0. \quad (4.4)$$

Im Folgenden werden wir die beiden Fälle betrachten, in denen nur einer der beiden 3-Link-Terme beiträgt, d.h. entweder $c_{1,2} \equiv 0$ oder $c_{3,0} \equiv 0$, um die Fermionwirkung weiter zu vereinfachen.

Als Eichwirkung wählen wir die tree-level-verbesserte 1×2 -Wirkung:

$$S_G = \frac{2N_c}{g^2} \left[\sum_{x,\nu > \mu} \frac{5}{3} \left(1 - \frac{1}{N_c} \text{Re tr} \left[\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right]_{\mu\nu}(x) \right) + \frac{1}{6} \left(1 - \frac{1}{2N_c} \text{Re tr} \left(\begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \quad \downarrow \quad \uparrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \end{array} \right)_{\mu\nu}(x) + \begin{array}{c} \text{---} \text{---} \text{---} \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \text{---} \text{---} \end{array} (x) \right) \right] . \quad (4.5)$$

In den hier durchgeführten störungstheoretischen Rechnungen steht diese Eichwirkung stellvertretend für die ganze Klasse von Wirkungen, die auf Tree-level mit der 1×2 -Wirkung identisch sind, da in den hier betrachteten Ordnungen der fermionischen Observablen die $\mathcal{O}(g^2)$ Koeffizienten der Eichwirkung Korrekturen höherer Ordnung sind. In dieser Klasse sind z.B. die tadpole verbesserte 1×2 -Wirkung sowie die 1-loop-on-shell-verbesserte Wirkung* aus Abschnitt 2.1.

Um die Koeffizienten 4.2 zu bestimmen werden wir folgendermaßen vorgehen: Zunächst betrachten wir in Abschnitt 4.1 die Verletzung der Rotationssymmetrie im freien Fermionpropagator. In dieser Ordnung der Störungstheorie haben der Fat-Link-Parameter ω , die 1-loop-Koeffizienten $c_{i,j}^{(2)}$ sowie die Wahl der Eichwirkung keinen Einfluß. Hier werden wir eine weitere Bedingung an die Koeffizienten $c_{i,j}^{(0)}$ herleiten, die diese für die beiden Fälle, in denen nur einer der beiden 3-Link-Terme beiträgt, eindeutig festlegt.

*In die 1-loop-Koeffizienten 2.26 der on-shell-verbesserten Eichwirkung gehen umgekehrt die Tree-level-Koeffizienten der Fermionwirkung ein, da es hier auch Fermion-1-loop-Beiträge gibt. Diese Koeffizienten müßten also modifiziert werden.

In einem zweiten Schritt berechnen wir die Selbstenergie-Beiträge zum Fermionpropagator (Abschnitt 4.2). Hier kommen die 1-loop-Koeffizienten $c_{i,j}^{(2)}$ ins Spiel und können in der Weise getrimmt werden, daß sich auch die Rotationssymmetrie in Ordnung g^2 verbessert.

Die in den folgenden Abschnitten verwendeten Definitionen sowie die expliziten Resultate der störungstheoretischen Rechnungen sind in Anhang C dargestellt.

4.1 Tree-level-Verbesserung

Rotationssymmetrie des freien Fermionpropagators

In diesem Abschnitt soll die Verletzung der Rotationssymmetrie des freien Fermionpropagators im Impulsraum untersucht werden. Dazu entwickelt man die Fermionwirkung in Ordnungen der Kopplung g , indem man die Linkvariablen entwickelt:

$$U_\mu(x) = e^{igA_\mu(x)} = \mathbb{1} + igA_\mu(x) + \mathcal{O}(g^2) \quad . \quad (4.6)$$

Den Beitrag in führender Ordnung erhält man also durch Ersetzen der Links durch die $\mathbb{1}$ -Matrix. Transformiert man nun die Wirkung in den Impulsraum durch die Ersetzung

$$\begin{aligned} \psi(x) &= \int_p e^{-ipx} \psi(p) \quad , \\ \bar{\psi}(x) &= \int_p e^{ipx} \bar{\psi}(p) \quad , \end{aligned}$$

so ergibt sich für den Koeffizienten der führenden Ordnung der Fermionwirkung 4.1

$$S^{(0)} = \int_p \bar{\psi}(p) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu(p) + m \right\} \psi(p) \quad . \quad (4.7)$$

Die Funktionen $h_\mu(p)$ sowie weitere Details sind in Anhang C gegeben. Damit lautet der freie Fermion-Propagator im Impulsraum:

$$\Delta_F^{(0)-1}(p) = \frac{-i \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu(p) + m}{\sum_\rho h_\rho^2(p) + m^2} = \frac{-i \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu(p) + m}{D^{(0)}(p) + m^2} \quad . \quad (4.8)$$

Der freie Propagator ist dann rotationssymmetrisch, wenn $D^{(0)}(p) = \sum_\mu h_\mu(p)h_\mu(p)$ nur von p^2 abhängt. Für die Standard Kogut-Susskind Wirkung ist diese Bedingung in $\mathcal{O}(p^4)$ verletzt. Entwickelt man $D^{(0)}(p)$, d.h. entwickelt man die trigonometrischen

Funktionen, die in $h_\mu(p)$ vorkommen, in Ordnungen von p , so kann man eine weitere Bedingung an die Koeffizienten $c_{i,j}^{(0)}$ finden, so daß der freie Fermionpropagator rotations-symmetrisch bis Ordnung p^4 ist, für Details siehe Anhang C.2. Diese Bedingung ist

$$c_{1,0}^{(0)} + 27 c_{3,0}^{(0)} + 6 c_{1,2}^{(0)} = 24 c_{1,2}^{(0)} . \quad (4.9)$$

Für die beiden Spezialfälle, in denen wir nur einen der beiden 3-Link-Terme in 4.1 berücksichtigen, legt diese Bedingung zusammen mit der Normierung 4.3 die Tree-level-Koeffizienten eindeutig fest. Im ersten Fall, $c_{1,2}^{(0)} \equiv 0$, ergibt dies die **Naik-Wirkung**, die auch Lösung der Tree-level-On-shell-Verbesserung ist (vergl. Gl. 3.36):

$$c_{1,0}^{(0)} = \frac{9}{16} , \quad c_{3,0}^{(0)} = -\frac{1}{48} . \quad (4.10)$$

Im anderen Fall, $c_{3,0}^{(0)} \equiv 0$, ergeben sich die Koeffizienten

$$c_{1,0}^{(0)} = \frac{3}{8} , \quad c_{1,2}^{(0)} = \frac{1}{48} . \quad (4.11)$$

Die durch diese Koeffizienten definierte Wirkung werden wir die **p4-Wirkung** nennen.

Da für die Naik-Wirkung die $\mathcal{O}(p^4)$ Terme nicht nur rotations-symmetrisch, sondern vollständig eliminiert sind, ist diese Wirkung sogar $\mathcal{O}(a^2)$ verbessert. Dies erscheint in diesem Zugang allerdings eher als zufällig.

Dispersionsrelation

Um einen ersten Eindruck von der Qualität der Tree-level-Verbesserung zu bekommen, untersuchen wir die Dispersionsrelation $E = E(p_x, p_y, p_z)$. Diese erhält man aus den Polen des freien Fermionpropagators im Minkowski-Raum, d.h. die Ersetzung der Zeitkomponente p_0 durch ip_0 beim Übergang zur Euklidischen Formulierung muß einbezogen werden. Die Pole sind also die Lösungen der Gleichung

$$D^{(0)}(iE, \vec{p}) = 0 . \quad (4.12)$$

Diese Gleichung ist als Gleichung im Komplexen zu verstehen, d.h. \vec{p} kann im allgemeinen auch komplexwertig sein und sowohl Real- als auch Imaginärteil der linken Seite müssen verschwinden.

Die Abbildungen 4.1 und 4.2 zeigen die Dispersionsrelationen für Impulse entlang der Koordinatenachsen $\vec{p} = (p, 0, 0)$ bzw. für Impulse entlang der Flächendiagonalen $\vec{p} = (p/\sqrt{2}, p/\sqrt{2}, 0)$ für die Standard Kogut-Susskind Wirkung, die Naik-Wirkung und die p4-Wirkung im Vergleich zur Kontinuum-Dispersionsrelation $E(p) = p$.

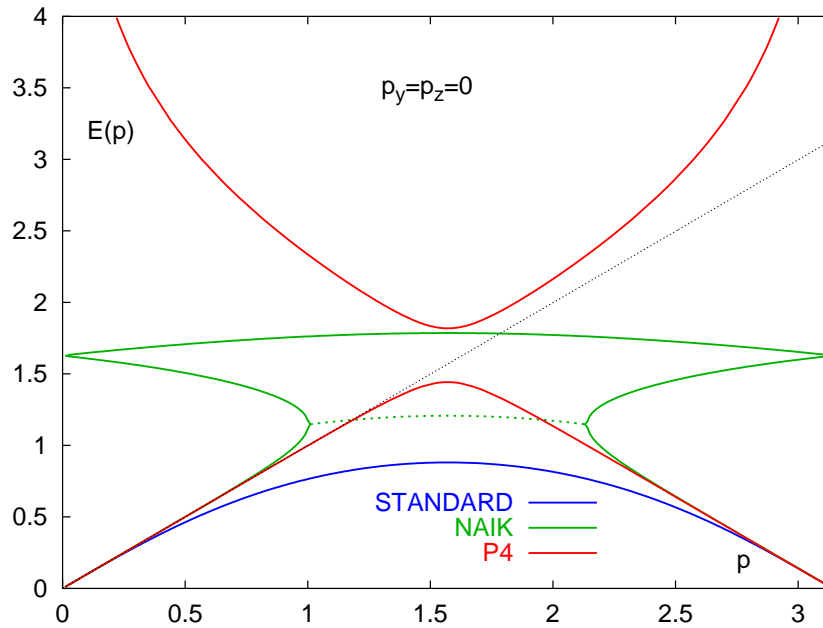


Abbildung 4.1: Dispersionsrelation $E = E(\vec{p})$ für Impulse entlang der Koordinatenachsen $\vec{p} = (p, 0, 0)$ für die Standard Kogut-Susskind Wirkung (blau), die Naik-Wirkung (grün) und die p4-Wirkung (rot) im Vergleich zur Kontinuum-Dispersionsrelation $E = p$ (schwarz, gepunktet). Durchgezogene Linien repräsentieren reelle Pole, gestrichelte Linien komplexe.

Im Fall der Naik-Wirkung für Impulse entlang der Koordinatenachsen sowie im Fall der Naik- und p4-Wirkung für Impulse entlang der Flächendiagonalen gibt es auch komplexe Pole des Propagators. Die Realteile dieser komplexen Pole sind zur Unterscheidung als gestrichelte Linien gezeichnet, sie liegen in allen Fällen im Bereich großer Impulse.

Im Kontinuum-Limes ($a \rightarrow 0$) bleibt nur der jeweilige Zweig in der linken unteren Ecke der E - p -Ebene übrig, denn diese wird wegen des Zusammenhangs zwischen Gitter-Größen und physikalischen Größen, $E = E_{\text{phys}} \cdot a$ und $p = p_{\text{phys}} \cdot a$, mit $1/a$ gestreckt. Die anderen Zweige, insbesondere auch die komplexen Pole, werden also entsprechend unterdrückt. Auf endlichen Gittern führt der endliche Gitterabstand a jedoch zu Abweichungen von der Kontinuum-Dispersionsrelation.

Die Graphen der Dispersionsrelationen für die verschiedenen Wirkungen zeigen aber, daß die Dispersionsrelationen für die tree-level-verbesserten Wirkungen auf einem viel größeren Impulsbereich nahe an der Kontinuum-Dispersionsrelation liegen. Insbesondere weist die Dispersionsrelation der p4-Wirkung für Impulse entlang der Achsen (Abb. 4.1) in einem Impulsbereich, der fast die halbe Brillouin-Zone umfaßt, nur sehr geringe Abweichungen von der Kontinuum-Relation auf.

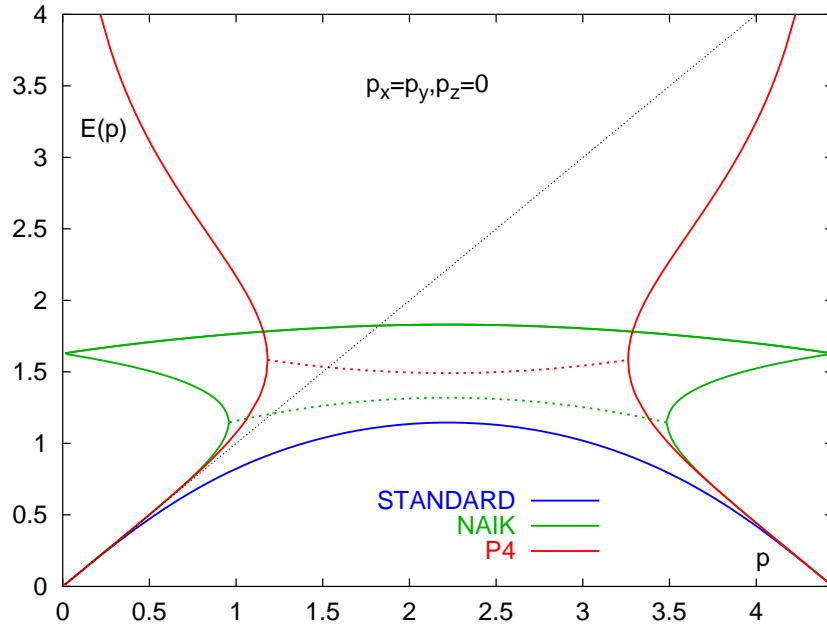


Abbildung 4.2: Dispersionsrelation $E = E(\vec{p})$ für Impulse entlang der Flächendiagonalen $\vec{p} = (p/\sqrt{2}, p/\sqrt{2}, 0)$ für die Standard Kogut-Susskind Wirkung (blau), die Naik-Wirkung (grün) und die p^4 -Wirkung (rot) im Vergleich zur Kontinuum-Dispersionsrelation $E = p$ (schwarz, gepunktet). Durchgezogene Linien repräsentieren reelle Pole, gestrichelte Linien komplexe.

Wie in Abschnitt 4.3 gezeigt wird, führt diese Tree-level-Verbesserung auch zu einer starken Reduzierung der Cut-off-Effekte im idealen Gas ($g \rightarrow 0$) Limes.

4.2 1-loop-Verbesserung

In diesem Abschnitt soll die Verletzung der Rotationssymmetrie auch in $\mathcal{O}(g^2)$ reduziert werden. Dazu betrachten wir wiederum den Fermionpropagator, denn dies ist die fundamentalste Observable in der Berechnung von Loop-Korrekturen zu thermodynamischen Observablen.

Der volle Fermionpropagator im Impulsraum ist definiert durch die Fouriertransfor-

mation des Ortsraumpropagators $G_F(x) = 1/V \sum_y \langle \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(x+y) \rangle$:

$$\begin{aligned}
\Delta_F^{-1}(p) &= \frac{1}{V} \sum_x e^{ipx} G_F(x) \\
&= \frac{1}{V^2} \sum_{x,y} e^{ipx} \langle \bar{\psi}(y) \bar{\psi}(x+y) \rangle \\
&= \frac{1}{V^2} \sum_{x,y} \int_{q,r} e^{i(p-r)x+i(q-r)y} \langle \bar{\psi}(q) \psi(r) \rangle \\
&= \int_{q,r} \delta(p-r) \delta(q-r) \langle \bar{\psi}(q) \psi(r) \rangle \\
&= \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) \rangle \quad ,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
\Delta_F^{-1}(p) &= \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) \rangle \tag{4.13} \\
&= Z^{-1} \int [DU][D\bar{\psi}][D\psi] \bar{\psi}(p) \psi(p) e^{-S\{U, \bar{\psi}, \psi\}} \quad ,
\end{aligned}$$

mit $Z = \int [DU][D\bar{\psi}][D\psi] \exp(-S\{U, \bar{\psi}, \psi\})$.

Die Entwicklung der Linkvariablen $U_\mu(x) = \exp(igA_\mu(x))$ liefert wieder die Entwicklung der Wirkung in Ordnungen von g :

$$S = S^{(0)} + gS^{(1)} + g^2S^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \quad , \tag{4.14}$$

wobei $S = S_G + S_F$ die volle Wirkung aus Fermion- und Gluonteil bezeichnet. Jetzt entwickeln wir e^{-S} bis $\mathcal{O}(g^2)$:

$$e^{-S} = e^{-S^{(0)}} \left[1 - gS^{(1)} + g^2 \left(\frac{1}{2} (S^{(1)})^2 - S^{(2)} \right) \right] + \mathcal{O}(g^3) \quad . \tag{4.15}$$

Damit ergibt sich für den Propagator

$$\begin{aligned}
Z \cdot \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) \rangle &= Z_0 \left\{ \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) \rangle_0 \right. \\
&\quad \left. + g^2 \left(\frac{1}{2} \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) (S^{(1)})^2 \rangle_0 - \langle \bar{\psi}(p) \psi(p) S^{(2)} \rangle_0 \right) \right\} + \mathcal{O}(g^4) \tag{4.16}
\end{aligned}$$

und die Zustandssumme

$$Z^{-1} = \frac{1}{Z_0} \left[1 - g^2 \left(\frac{1}{2} \langle (S^{(1)})^2 \rangle_0 - \langle S^{(2)} \rangle_0 \right) \right] + \mathcal{O}(g^4) \quad . \tag{4.17}$$

Dabei bedeutet der Index 0, daß die Erwartungswerte bezüglich der freien Wirkung $S^{(0)}$ genommen werden:

$$\langle \mathcal{O} \rangle_0 \equiv \frac{1}{Z_0} \int [DU] [D\bar{\psi}D\psi] \mathcal{O} e^{-S^{(0)}} , \quad Z_0 \equiv \int [DU] [D\bar{\psi}D\psi] e^{-S^{(0)}} .$$

In den Erwartungswerten in den Gleichungen 4.16 und 4.17 tragen die Terme von Ordnung g nicht bei, da in diesen jeweils nur ein Eichfeld steht und $\langle A_\mu(k) \rangle_0 \equiv 0$. Aus 4.16 und 4.17 ergibt sich

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \rangle &= \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \rangle_0 \\ &+ g^2 \left(\frac{1}{2} \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) (S^{(1)})^2 \rangle_{0,c} - \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) S^{(2)} \rangle_{0,c} \right) + \mathcal{O}(g^4) , \end{aligned} \quad (4.18)$$

wobei in $\mathcal{O}(g^2)$ nur die zusammenhängenden Teile der Erwartungswerte eingehen:

$$\langle \bar{\psi}(p)\psi(p)\mathcal{O} \rangle_{0,c} \equiv \langle \bar{\psi}(p)\psi(p)\mathcal{O} \rangle_0 - \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \rangle_0 \langle \mathcal{O} \rangle_0 .$$

Setzt man nun $S^{(i)} = S_F^{(i)} + S_G^{(i)}$ in die Entwicklung 4.18 ein, so findet man

$$\begin{aligned} \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \rangle &= \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \rangle_0 + g^2 \left(\frac{1}{2} \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) (S_F^{(1)})^2 \rangle_{0,c} \right. \\ &\quad \left. - \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) S_F^{(2)} \rangle_{0,c} - \langle \bar{\psi}(p)\psi(p) \tilde{S}_F^{(0)} \rangle_{0,c} \right) + \mathcal{O}(g^4) , \end{aligned} \quad (4.19)$$

da die Beiträge, die von den Entwicklungskoeffizienten $(S_G^{(1)})^2$, $S_G^{(2)}$ sowie $S_F^{(1)} \cdot S_G^{(1)}$ stammen, nicht beitragen. Die ersten beiden verschwinden, da sie nicht-zusammenhängende Terme liefern, der letzte trägt nicht bei, da dieser einen Nullmoden-Beitrag liefert.

$(S_F^{(1)})^2$ und $S_F^{(2)}$ sind Selbstenergie-Beiträge, die von den Teilen der Wirkung stammen, welche unabhängig von den 1-loop-Koeffizienten $c_{i,j}^{(2)}$ sind, wogegen $\tilde{S}_F^{(0)}$ von diesen abhängt. $S_F^{(0)}$ und $\tilde{S}_F^{(0)}$ sind formal die selben Terme bis auf einen Austausch von Tree-level- und 1-loop-Koeffizienten. Die explizite Form dieser Beiträge ist in Anhang C.1 angegeben.

Eine Integration über die Fermionfelder liefert dann

$$\Delta_F^{(2)-1}(p)_{\alpha\beta}^{ab} = \left[\Delta_F^{(0)-1}(p) \left[\sum_{\mu} i\gamma_{\mu} (D_{\mu}^{(0)}(p) + g^2 (\Sigma_{\mu}(p) + D_{\mu}^{(2)}(p))) \right] \Delta_F^{(0)-1}(p) \right]_{\alpha\beta}^{ab} ,$$

wobei die Terme den folgenden Diagrammen entsprechen:

$$\begin{aligned}
D_\mu^{(0)}(p) &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} , \\
D_\mu^{(2)}(p) &= \text{---} \xrightarrow{p} \times \xrightarrow{p} \text{---} , \\
\Sigma_\mu(p) &= \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p-k} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} + \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} \xrightarrow{p} \text{---} .
\end{aligned}$$

Die expliziten Resultate sind in Anhang C.3 aufgeführt. Der Selbstenergieterm Σ enthält neben dem Beitrag $(S_F^{(1)})^2$, welcher auch im Kontinuum beiträgt, einen 1-loop-Term, $S_F^{(2)}$, der ein reines Gitterartefakt ist. Der $D^{(2)}$ Term stammt von den 1-loop-Koeffizienten $c_{i,j}^{(2)}$ und ist eine Art Counter-Term in dem Sinne, daß mit diesen Koeffizienten die 1-loop-Beiträge adjustiert werden können; er behebt jedoch keine Divergenzen.

Um die Rotationssymmetrie des Fermionpropagators bis $\mathcal{O}(g^2)$ zu verbessern, betrachten wir den Nenner \mathcal{D} von $\Delta_F^{(2)-1}(p)$, entwickeln diesen bis $\mathcal{O}(g^2)$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(p) &\equiv \sum_\mu (D_\mu^{(0)}(p) + g^2 (\Sigma_\mu(p) + D_\mu^{(2)}(p)))^2 \\
&= \sum_\mu D_\mu^{(0)}(p) D_\mu^{(0)}(p) + 2g^2 \sum_\mu D_\mu^{(0)}(p) (\Sigma_\mu(p) + D_\mu^{(2)}(p)) + \mathcal{O}(g^4) ,
\end{aligned}$$

und fordern, daß \mathcal{D} eine Funktion ist, die nur von p^2 abhängt, analog zum Tree-level-Fall, der in Abschnitt 4.1 diskutiert wurde. Aus dieser Forderung folgen dann Bedingungen an die 1-loop-Koeffizienten analog zur Vorgehensweise im vorhergehenden Abschnitt. Doch im Gegensatz zum Tree-level-Fall ist eine einfache Entwicklung in Potenzen von p hier nicht möglich, da der Beitrag, der von $(S_F^{(1)})^2$ stammt logarithmische Divergenzen besitzt, d.h. eine Entwicklung dieses Terms zieht Divergenzen immer höherer Ordnung nach sich.

Alternativ dazu betrachten wir Impulse entlang der Koordinatenachsen und entlang der Flächendiagonalen, die den selben Betrag haben, $p_1 = (\tilde{p}, 0, 0, 0)$ und $p_2 = (\tilde{p}/\sqrt{2}, \tilde{p}/\sqrt{2}, 0, 0)$, und bestimmen die Koeffizienten durch Lösen der Gleichung

$$\mathcal{D}(p_1) = \mathcal{D}(p_2) \quad (4.20)$$

für kleine Impulse \tilde{p} . Der Term $\sum_\mu D_\mu^{(0)}(p) D_\mu^{(0)}(p)$ ist mit den Tree-level-Koeffizienten aus Abschnitt 4.1 bereits rotationssymmetrisch bis Ordnung p^4 . Daher berücksichtigen wir in dieser Gleichung nur die Terme proportional g^2 .

Im allgemeinen hängt $\mathcal{D}(p)$ auch von dem Fat-Link-Parameter ω ab. Da jedoch die Einbeziehung von Fat-Links einen zu vernachlässigenden Effekt in der Thermodynamik hat (wie wir im nächsten Abschnitt zeigen werden, in dem wir die freie Energiedichte bis $\mathcal{O}(g^2)$ betrachten), wählen wir den festen Wert $\omega=0$ für diese Berechnung. Wie im vorherigen Abschnitt wollen wir auch hier die beiden Spezialfälle betrachten, in denen nur einer der beiden 3-Link-Terme beiträgt. Mit der Normierungsbedingung 4.4 gibt es also nur einen freien 1-loop-Parameter, den man als Lösung von Gleichung 4.20 bestimmen kann.

Bei der praktischen Lösung von Gleichung 4.20 führen die verschiedenen Beiträge zu \mathcal{D} zum Teil zu technischen Problemen. Der $\tilde{S}^{(0)}$ Beitrag ist unabhängig von der Eichwirkung, er ist eine einfache Funktion der Fermion-Impulse p .

Aus den verschiedenen Teilen des $S_F^{(2)}$ Beitrags kann man die p -Abhängigkeit aus den gluonischen Integralen ausfaktorisieren. Daher kann man diese Integrale auf einmal für alle Impulse p berechnen. In Anhang C.3 wird gezeigt, daß man die gluonischen Beiträge, die im $S_F^{(2)}$ Beitrag auftreten, auf drei bestimmte Integrale zurückführen kann. Diese Integrale können mit sehr hoher Genauigkeit mit der Methode der Gauß-Legendre-Integration berechnet werden. Im Prinzip können diese Beiträge in Potenzen von p wie im vorhergehenden Abschnitt entwickelt werden.

Dies gilt jedoch nicht für den $(S_F^{(1)})^2$ Beitrag, der weitaus größere technische Probleme verursacht. Er führt zu einer logarithmischen Divergenz im $p \rightarrow 0$ Limes. Im Gegensatz zum $S_F^{(2)}$ Beitrag, lassen sich diese Terme auch nicht in gluonische und fermionische Teile faktorisieren, so daß dieser Beitrag für jeden Fermionimpuls \tilde{p} separat berechnet werden muß. Die beschriebene Divergenz verursacht dabei numerische Probleme für kleine Impulse p , bei denen der Pol der inneren Gluonlinie, welcher bei $p - k = 0$ liegt, in den Pol des freien Gluonpropagators bei $k = 0$ läuft. Praktisch bedeutet dies, daß numerische Integrationen nicht für beliebig kleine p möglich sind.

Lösungen der Gleichung 4.20 sind in Abbildung 4.3 für die Naik-Wirkung (a) und die p4-Wirkung (b) als Funktion des Impulses \tilde{p} dargestellt. Die Quadrate sind Lösungen für $c_{1,1}^{(2)}$, die man erhält, wenn man nur den $D^{(2)}$ Term und den $S_F^{(2)}$ Teil von Σ berücksichtigt. d.h. wenn man den $(S_F^{(1)})^2$ Term vernachlässigt. Da die p Abhängigkeit dieser Beiträge explizit gegeben ist, kann man problemlos präzise Resultate bis hin zu sehr kleinen Impulsen berechnen.

Die Dreiecke stellen die Lösungen unter Berücksichtigung aller Beiträge einschließlich des $(S_F^{(1)})^2$ Terms dar. Die Streuung der Punkte für kleine \tilde{p} wird durch die oben beschriebenen numerischen Probleme für den $(S_F^{(1)})^2$ Beitrag in diesem Bereich verursacht. Im Fall der Naik-Wirkung bekommen wir stabile Resultate im Bereich $\tilde{p} \geq 0.1$, wogegen die Werte für die p4-Wirkung nur für $\tilde{p} \geq 0.3$ vertrauenswürdig sind. In diesen Bereichen wurde Anzahl der Gauß-Stützstellen erhöht, bis die Resultate stabil wurden; für die kleinen Impulse waren das bis zu 320 Stützstellen in jeder Richtung.

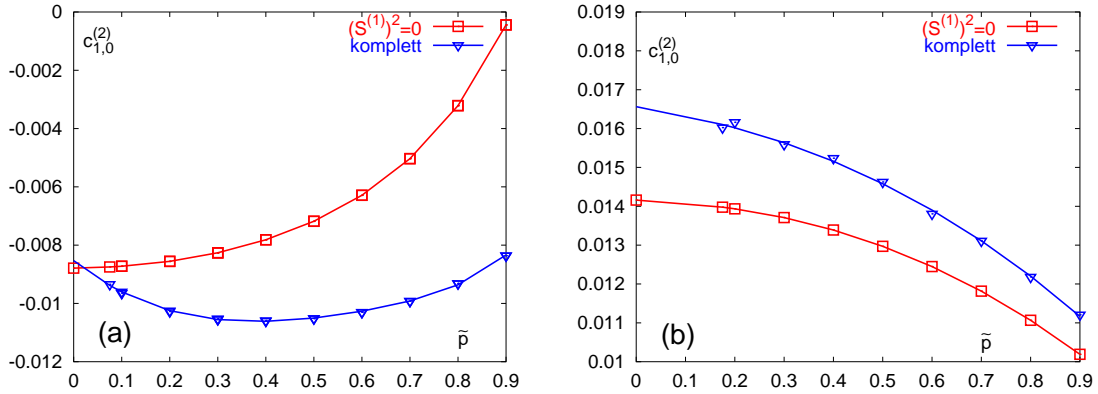


Abbildung 4.3: Lösungen der Gleichung 4.20 mit kompletten Beiträgen (blau) und ohne $(S_F^{(1)})^2$ Beiträge (rot) für die Naik-Wirkung (a) und die p4-Wirkung (b). Die Linien sind im Fall der kompletten Beiträge mit einem polynomialen Fit extrapoliert.

Die Abbildungen 4.3 deuten darauf hin, daß die Verletzung der Rotationssymmetrie hauptsächlich vom $S_F^{(2)}$ Teil des Selbstenergieterms verursacht wird. Dies ist auch naheliegend, da dieser Term im Gegensatz zum $(S_F^{(1)})^2$ Beitrag ein reines Gitterartefakt ist. Bei der Extrapolation der Resultate für $\tilde{p} \rightarrow 0$ machen wir uns dies zu nutze, indem zunächst die Resultate, die den $(S_F^{(1)})^2$ Term nicht berücksichtigen, extrapolieren. Betrachtet man die Differenz aus “kompletten” und “nicht-kompletten” Resultaten, so findet man für die p4-Wirkung ein lineares und für die Naik-Wirkung ein quadratisches Verhalten, welches man sehr gut fitten kann. Addiert man diese Fit-Funktionen zu den nicht-kompletten Resultaten, so erhält man einen Fit für die kompletten Daten und einen extrapolierten Wert bei $p = 0$ aus der Extrapolation der nicht-kompletten Daten.

Die extrapolierten Werte für die Koeffizienten lauten:

$$\begin{aligned} \text{Naik-Wirkung} & : c_{1,0}^{(2)} = -0.0085 \quad , \quad c_{3,0}^{(2)} = 0.00283 \\ \text{p4-Wirkung} & : c_{1,0}^{(2)} = 0.0165 \quad , \quad c_{1,2}^{(2)} = -0.00275 \end{aligned}$$

Es fällt auf, daß diese Werte eine “Überverbesserung” durch die tree-level-verbesserten Wirkungen bei endlichem g indizieren, da die Koeffizienten durch die 1-loop-Beiträge in Richtung der Standard Kogut-Susskind Wirkung korrigiert werden.

4.3 Freie Energiedichte bis $\mathcal{O}(g^2)$

Wie in Abschnitt 2.3 im Fall der reinen Eichtheorie diskutiert wurde zeigen thermodynamische Observable starke Cut-off-Abhängigkeiten in Gitter-Simulationen

bei endlicher Temperatur. Für die Untersuchung des Einflusses endlicher Cut-off-Effekte auf thermodynamische Observable hat sich hier der störungstheoretische Hochtemperatur-Limes als geeignet erwiesen.

Wir wollen hier diese Betrachtungen auf den fermionischen Sektor ausdehnen. Der thermodynamische Hochtemperatur-Limes ist seit langem aus der Kontinuum-Störungstheorie bis Ordnung g^2 bekannt [35][†]; die freie Energiedichte der QCD für n_f Flavour masseloser Quarks und die $SU(N_c)$ Eichgruppe lautet:

$$\begin{aligned}
f_{\text{cont}} &\equiv f_{\text{cont},G}^{(0)} + f_{\text{cont},F}^{(0)} + g^2 \left(f_{\text{cont},G}^{(2)} + f_{\text{cont},F}^{(2)} \right) + \mathcal{O}(g^3) \quad , \text{ mit} \\
f_{\text{cont},G}^{(0)}/T^4 &= -\frac{1}{45}\pi^2 (N_c^2 - 1) \quad , \\
f_{\text{cont},G}^{(2)}/T^4 &= \frac{1}{144}g^2 (N_c^2 - 1) N_c \quad , \\
f_{\text{cont},F}^{(0)}/T^4 &= -n_f \frac{7}{180}\pi^2 N_c \quad , \\
f_{\text{cont},F}^{(2)}/T^4 &= n_f \frac{5}{576} (N_c^2 - 1) \quad .
\end{aligned} \tag{4.21}$$

Die Entwicklung des Drucks und der Energiedichte erhält man aus der thermodynamischen Relation $\epsilon = 3p = -3f$, die bis zu dieser Ordnung gilt.

Auf Gittern mit zeitlicher Ausdehnung N_τ findet man im Eichsektor für die Standard Plaquette-Wirkung große $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ Abweichungen vom idealen Gas-Limes, der aus der Kontinuum-Störungstheorie bekannt ist, $f_{\text{cont},G}^{(0)}$. Tree-Level-verbesserte Wirkungen reduzieren diese Abweichungen im Hochtemperatur-Limes in führender Ordnung drastisch. Es wurde gezeigt, daß eine störungstheoretische Verbesserung des Hochtemperatur-Verhaltens auch zu einer deutlichen Reduzierung der Cut-off-Effekte bei endlichen Temperaturen führt.

Im fermionischen Sektor weist die Standard Kogut-Susskind Wirkung ebenfalls Abweichungen vom Kontinuum idealen Gas-Limes $f_{\text{cont},F}^{(0)}$ auf, die von $\mathcal{O}(1/N_\tau^2)$ und sogar noch größer sind als im Eichsektor [5]. Per Konstruktion reduziert die tree-level-verbesserte Naik-Wirkung die Abweichungen in den fermionischen Beiträgen zur Energiedichte ϵ .

Es soll nun untersucht werden, wie der Einfluß der im vorhergehenden Abschnitt konstruierten staggered Fermionwirkungen auf das Hochtemperatur-Verhalten ist. Insbesondere interessiert dabei, ob die Verbesserung der Rotationssymmetrie des Fermionpropagators auf Tree-level und in 1-loop-Ordnung zu einer Reduzierung der Cut-off-Effekte führt und welchen Einfluß die Fat-Link-Verbesserung auf die Thermodynamik hat (es sei noch einmal daran erinnert, daß die Motivation für Fat-Links

[†]Vor kurzem wurden im reinen Eichsektor alle Terme, die störungstheoretisch berechenbar sind (bis $\mathcal{O}(g^5)$), berechnet [36].

die Verbesserung der Flavour-Symmetrie und nicht die Reduzierung von Cut-off-Effekte in der Thermodynamik ist).

Wir berechnen dazu den fermionischen Beitrag zur freien Energiedichte f_F in Gitter-Störungstheorie bis zur Ordnung g^2 , da der Einfluß der Fat-Link-Verbesserung, der 1-loop-Koeffizienten sowie der gewählten Eichwirkung sich erst in Ordnung g^2 zeigt.

Da wir in der naiven Fermion-Formulierung arbeiten, ist die Anzahl der Flavour-Freiheitsgrade $n_f=16$. Es ist gezeigt worden, daß bis $\mathcal{O}(g^2)$ die Gitterstörungstheorie für naive und für staggered Fermionen äquivalent ist und die korrekte n_f Abhängigkeit, die in dieser Ordnung nur ein multiplikativer Faktor ist, im nachhinein eingeführt werden kann [37]. Wir werden stets den masselosen Fall, $m=0$, betrachten, um vergleichbare Resultate zu erhalten.

Wir wählen die freie Energiedichte für diese Entwicklung, da sie durch eine sehr einfache Relation, den Logarithmus der Zustandssumme, definiert ist, und sich dadurch erheblich besser eignet als die Energiedichte ϵ , welche durch eine Ableitung des Logarithmus der Zustandssumme definiert ist. Wir erhalten die Entwicklung von f wiederum aus der Entwicklung der Wirkung 4.14:

$$\begin{aligned} e^{-\frac{V}{T}f} &\equiv Z = \int [DU] [D\bar{\psi}D\psi] e^{-S} \\ &= Z_0 \left\{ 1 - g^2 \left[\langle S^{(2)} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle (S^{(1)})^2 \rangle_0 \right] + \mathcal{O}(g^3) \right\}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Aus den gleichen Argumenten wie im vorhergehenden Abschnitt folgt, daß die Entwicklungskoeffizienten der Ordnung g gleich Null sind.

Durch logarithmieren der Gleichung 4.22 erhält man dann die Entwicklung der freien Energiedichte:

$$\begin{aligned} f &= f^{(0)} + g^2 f^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \\ &= -\frac{T}{V} \log Z^{(0)} + g^2 \frac{T}{V} \left[\langle S^{(2)} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle (S^{(1)})^2 \rangle_0 + \langle \tilde{S}^{(0)} \rangle_0 \right] + \mathcal{O}(g^3). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Bis zu dieser Ordnung kann man f in gluonische und fermionische Anteile zerlegen, wenn man die entsprechende Zerlegung der Entwicklungskoeffizienten der Wirkung $S^{(i)} = S_G^{(i)} + S_F^{(i)}$ einsetzt:

$$f = f_G + f_F, \text{ mit} \quad (4.24)$$

$$f_G = f_G^{(0)} + g^2 f_G^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \quad (4.25)$$

$$= -\frac{T}{V} \log Z_G^{(0)} + g^2 \frac{T}{V} \left[\langle S_G^{(2)} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle (S_G^{(1)})^2 \rangle_0 + \langle \tilde{S}_G^{(0)} \rangle_0 \right] + \mathcal{O}(g^3),$$

$$f_F = f_F^{(0)} + g^2 f_F^{(2)} + \mathcal{O}(g^3) \quad (4.26)$$

$$= -\frac{T}{V} \log Z_F^{(0)} + g^2 \frac{T}{V} \left[\langle S_F^{(2)} \rangle_0 - \frac{1}{2} \langle (S_F^{(1)})^2 \rangle_0 + \langle \tilde{S}_F^{(0)} \rangle_0 \right] + \mathcal{O}(g^3).$$

Dabei haben wir benutzt, daß

$$Z^{(0)} = Z_G^{(0)} \cdot Z_F^{(0)}, \text{ mit} \quad (4.27)$$

$$Z_G^{(0)} = \int [DU] e^{-S_G^{(0)}}, \quad (4.28)$$

$$Z_F^{(0)} = \int [D\bar{\psi}D\psi] e^{-S_F^{(0)}}. \quad (4.29)$$

Außerdem haben wir benutzt, daß der gemischte Term $\langle S_G^{(1)} \cdot S_F^{(1)} \rangle_0$ verschwindet, da $S_F^{(1)} \sim \bar{\psi} A_\mu \psi$ und somit die Integration über die Fermionfelder $\langle S_G^{(1)} \cdot S_F^{(1)} \rangle_0 \sim \text{tr} A_\mu = 0$ liefert, da die Generatoren der $SU(N_c)$ spurlos sind.

Die expliziten Ausdrücke für die Entwicklungskoeffizienten des fermionischen Teils der freien Energiedichte sind in Anhang C.4 gegeben. Die verschiedenen fermionischen Beiträge entsprechen den folgenden Diagrammen:

$$\begin{aligned}
 f_F^{(0)} &= \text{Diagramm 1} \quad , & \langle \tilde{S}_F^{(0)} \rangle_0 &= \text{Diagramm 2} \quad , \\
 \langle (S_F^{(1)})^2 \rangle_0 &= \text{Diagramm 3} \quad , & \langle S_F^{(2)} \rangle_0 &= \text{Diagramm 4} \quad .
 \end{aligned}$$

Offensichtlich gibt es eine Entsprechung zwischen diesen Beiträgen und denen zum im vorhergehenden Abschnitt betrachteten Fermionpropagator; man erhält diese Graphen, wenn man die eingehenden und auslaufenden Fermionlinien der Diagramme des Fermionpropagators verbindet.

Der $\tilde{S}_F^{(0)}$ Beitrag enthält die komplette Abhängigkeit von den 1-loop-Koeffizienten und trägt nicht bei, wenn diese vernachlässigt werden. Die $S_F^{(2)}$ und $(S_F^{(1)})^2$ Beiträge enthalten die Abhängigkeit vom Fat-Link-Parameter ω . Der $S_F^{(2)}$ Beitrag kann wiederum in fermionische und gluonische Loop-Integrale faktorisiert werden, im Gegensatz zum $(S_F^{(1)})^2$ Beitrag.

Um den Beitrag bei endlicher Temperatur zu extrahieren, muß man die Differenz der freien Energiedichte auf $N_\sigma^3 \times N_\tau$ und N_σ^4 Gittern berechnen, wobei wir die räumliche Ausdehnung unendlich groß wählen, $N_\sigma = \infty$, um Effekte endlichen Volumens auszuschließen. Die Loop-Integrale über die räumlichen Impulse sowie die, über die zeitlichen Impulse für die Temperatur Null Beiträge, wurden mit dem Gauß-Legendre Verfahren berechnet. Für Beiträge bei endlicher Temperatur wurden die

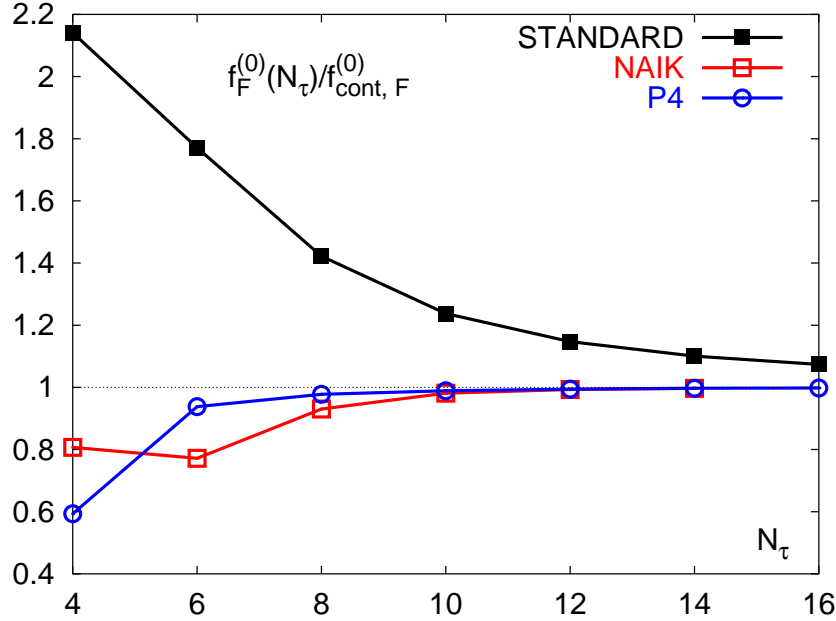


Abbildung 4.4: Fermionische Tree-level-Beiträge zur freien Energiedichte normiert auf den entsprechenden Kontinuum-Beitrag als Funktion der zeitlichen Ausdehnung N_τ für die Standard Kogut-Susskind Wirkung (schwarz), die Naik-Wirkung (rot) und die p4-Wirkung (blau).

endlichen Summen über die zeitlichen Impulse explizit ausgeführt.

Der numerische Aufwand zur Berechnung der 1-loop-Beiträge[‡], insbesondere des $(S_F^{(1)})^2$ Beitrags, ist sehr groß und wächst mit $(\#\text{Gauß-Stützstellen})^8$, weshalb die maximale Anzahl von Stützstellen gleich 32 in jeder Richtung war; dies sind insgesamt ca. 10^{12} Stützstellen. Bei kleiner zeitlicher Ausdehnung $N_\tau \leq 8$ findet man eine gute Konvergenz der 1-loop-Beiträge, wenn man die Anzahl der Stützstellen auf bis zu 32 erhöht. Bei größeren N_τ wird der Grenzwert jedoch nicht mit dieser maximalen Anzahl Stützstellen erreicht. Wir haben aber festgestellt, daß die Resultate ein klares $(\#\text{Gauß-Stützstellen})^{-4}$ Verhalten zeigen, so daß man diese auch für $N_\tau > 8$ zu einer unendlichen Anzahl Stützstellen extrapolieren kann. Der Fehler dieser Extrapolation wächst sicherlich mit zunehmendem N_τ ; da wir jedoch vornehmlich an den Abweichungen von der Kontinuum-Störungstheorie für kleine N_τ Werte interessiert sind, beeinträchtigen diese Unsicherheiten nicht unsere Schlußfolgerungen. Die Resultate bei großen N_τ Werten dienen vielmehr der Überprüfung der Richtigkeit unserer Rechnungen insofern diese mit wachsendem N_τ gegen das entsprechende Kontinuum-Resultat konvergieren sollten.

Es ist möglich, die explizite Abhängigkeit der 1-loop-Beiträge vom Fat-Link-Pa-

[‡]Die Beiträge in Ordnung g^2 werden durchgehend als 1-loop-Beiträge bezeichnet, auch wenn diese hier eigentlich 2 Loops enthalten.

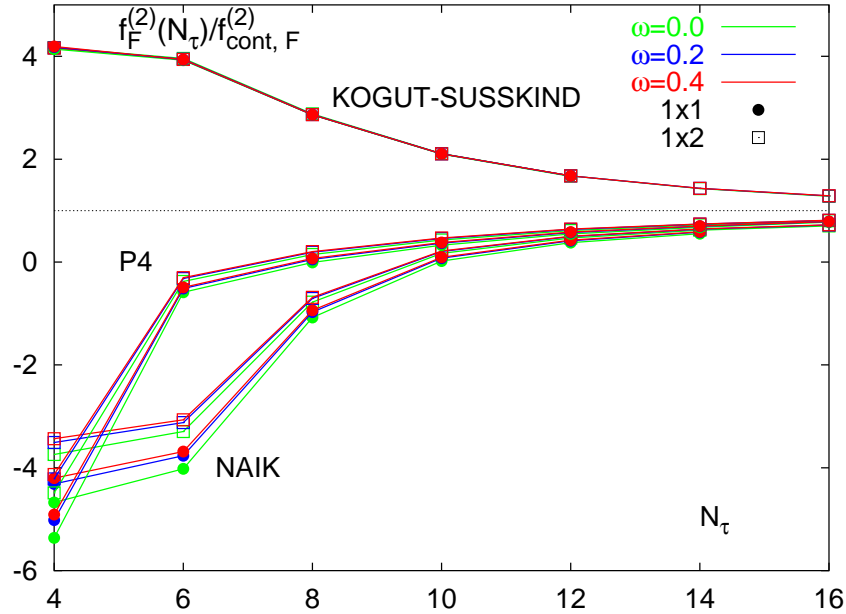


Abbildung 4.5: Fermionische 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte normiert auf den entsprechenden Kontinuum-Beitrag als Funktion der zeitlichen Ausdehnung N_τ für verschiedene Fermionwirkungen. Die verschiedenen Farben repräsentieren die Fat-Link-Parameter $\omega = 0.0, 0.2, 0.4$. Kreise bezeichnen die Wahl der Standard Eichwirkung, offene Quadrate die Wahl der 1×2 Eichwirkung. In der Naik- und der p4-Wirkung sind nur die Tree-level-Koeffizienten berücksichtigt, d.h. $c_{i,j}^{(2)} \equiv 0$. Die Resultate für $N_\tau > 8$ sind extrapoliert.

parameter ω auszufaktorisieren. Desweiteren kann man die Abhängigkeit der 1-loop-Beiträge von den 1-loop-Koeffizienten explizit aus dem $\tilde{S}_F^{(0)}$ Beitrag, auf den sich diese Abhängigkeit beschränkt, herausziehen. Sowohl für die Naik- wie auch die p4-Wirkung gibt es mit der Normierungsbedingung 4.4 einen freien 1-loop-Koeffizienten; in beiden Fällen wählen wir den Koeffizienten $c_{1,0}^{(2)}$ und ziehen diesen jeweils aus dem $\tilde{S}_F^{(0)}$ Beitrag heraus.

Damit erhalten wir folgende Parametrisierung der 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte:

$$f_F^{(2)}/f_{F,\text{cont}}^{(2)}(N_\tau; \omega, c_{1,0}^{(2)}) = f_0(N_\tau) + \frac{\omega}{1+6\omega} \cdot f_1(N_\tau) + \frac{\omega^2}{(1+6\omega)^2} \cdot f_2(N_\tau) + c_{1,0}^{(2)} \cdot \tilde{f}(N_\tau) \quad (4.30)$$

Die Resultate der einzelnen Terme dieser Parametrisierung sowie die Tree-level-Beiträge sind in Anhang C.5 tabelliert.

Abbildung 4.4 zeigt die Abweichungen der fermionischen Tree-level-Beiträge zur

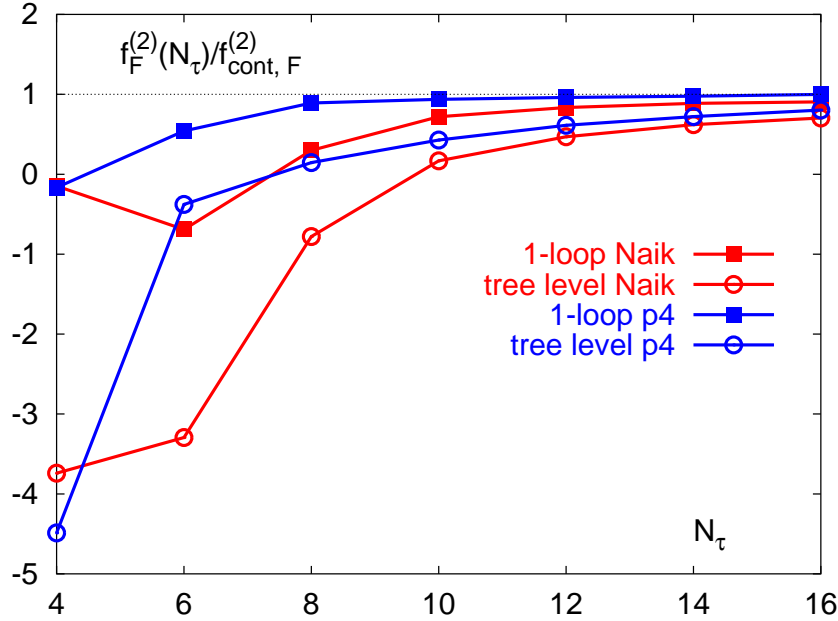


Abbildung 4.6: Fermionische 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte normiert auf den entsprechenden Kontinuum-Beitrag als Funktion der zeitlichen Ausdehnung N_τ für Naik-Wirkung (rot) und die p4-Wirkung (blau) für den Fall der Tree-level-Verbesserung, d.h. $c_{i,j}^{(2)} \equiv 0$, (offene Kreise) und den Fall der 1-loop-Verbesserung (Quadrate). In allen Fällen wurde die 1×2 Eichwirkung benutzt. Die Resultate für $N_\tau > 8$ sind extrapoliert.

freien Energiedichte vom Stefan-Boltzmann-Limes für die Standard Kogut-Susskind Wirkung, die Naik-Wirkung und die p4-Wirkung. Die Standard Wirkung führt bei kleinen N_τ Werten zu sehr großen Abweichungen, bei $N_\tau=4$ liefert sie einen mehr als doppelt so großen Beitrag wie im Kontinuum. Die tree-level-verbesserten staggered Fermionwirkungen reduzieren diese cut-off-abhängigen Korrekturen drastisch, bei $N_\tau=4$ auf etwa 20% im Fall der Naik-Wirkung und auf etwa 40% im Fall der p4-Wirkung. Im Bereich $N_\tau \geq 6$ sind die Verbesserungen noch deutlicher, insbesondere die p4-Wirkung zeigt hier nur noch Abweichungen, welche auf wenige Prozent reduziert sind im Vergleich zu der Abweichung von etwa 80% der Standard Wirkung bei $N_\tau=6$.

Die Resultate für den fermionischen Beitrag zur freien Energiedichte in Ordnung g^2 , $f_F^{(2)}$, normiert auf den Kontinuum-Beitrag in Ordnung g^2 , $f_{F,\text{cont}}^{(2)}$, sind in den Abbildungen 4.5 und 4.6 dargestellt. Abbildung 4.5 zeigt den Einfluß der Fat-Link-Verbesserung und der Eichwirkung für die betrachteten tree-level-verbesserten Fermionwirkungen und die Standard Kogut-Susskind Wirkung, die 1-loop-Koeffizienten wurden hier also gleich Null gesetzt. Für den Fat-Link-Parameter sind die Werte dargestellt, die von der MILC Kollaboration benutzt wurden, $\omega = 0.0, 0.2, 0.4$. Als

Eichwirkung betrachten wir die Standard 1×1 -Wirkung und die 1×2 -Wirkung. Für alle Wirkungen findet man große Abweichungen vom Kontinuum-Wert bei kleinen N_τ , wobei die p4-Wirkungen am schnellsten gegen den Kontinuum-Wert konvergieren. Den größten Einfluß hat die Wahl der Tree-level-Koeffizienten. Es fällt auf, daß beide Tree-level-Verbesserungen zu einem Vorzeichenwechsel gegenüber der Standard Wirkung führen. Dagegen ist der Einfluß der Eichwirkung sowie des Fat-Link-Parameters zu vernachlässigen. Dies ist nicht unerwartet, da Fat-Links eingeführt wurden, um das Infrarot-Verhalten zu verbessern und die Flavour-Symmetrie-Verletzung zu reduzieren, und nicht, um das Ultraviolett-Verhalten zu beeinflussen. Verbesserte Eichwirkungen sollen ebenfalls nicht Cut-off-Effekte in fermionischen Observablen verringern, sie beeinflussen primär den gluonischen Sektor.

Der Einfluß der 1-loop-Verbesserung der Naik- und der p4-Wirkung, die im vorhergehenden Abschnitt durchgeführt wurde, auf das Hochtemperaturverhalten in Ordnung g^2 ist in Abbildung 4.6 dargestellt. Um diesen Aspekt herauszuheben, wurde in allen Fällen die 1×2 -Eichwirkung benutzt sowie der Fat-Link-Parameter gleich Null gewählt. Die Abbildung zeigt, daß die Cut-off-Effekte in Ordnung g^2 für beide 1-loop-verbesserten Wirkungen stark reduziert sind verglichen mit den entsprechenden tree-level-verbesserten Wirkungen. Schon bei $N_\tau=6$ sind die Abweichungen vom Ordnung g^2 Kontinuum-Beitrag im Fall der 1-loop-p4-Wirkung auf etwa $1/10$ und für die 1-loop-Naik-Wirkung auf etwa $2/5$ der Abweichungen, die man mit der Standard Wirkung erhält, reduziert. Die 1-loop-verbesserte p4-Wirkung zeigt dabei deutlich das schnellste Konvergenzverhalten.

Im vorhergehenden Abschnitt wurde bereits darauf hingewiesen, daß die 1-loop-Koeffizienten in beiden Fällen, Naik- und p4-Wirkung, die Tree-level-Koeffizienten in Richtung der Standard Wirkung korrigieren. Dies deutet auf eine “Überverbesserung” in Ordnung g^2 durch die Tree-level-Koeffizienten hin. Diese Interpretation wird durch den Vorzeichenwechsel von $f_F^{(2)}$ zwischen Standard und tree-level-verbesserten Wirkungen untermauert. Die 1-loop-Koeffizienten wirken dieser “Überverbesserung” entgegen und reduzieren sie deutlich.

4.4 Flavour-Symmetrie

Im vorherigen Abschnitt wurde gezeigt, daß die Fat-Link-Verbesserung keinen signifikanten Einfluß auf das Hochtemperaturverhalten der freien Energiedichte hat. Umgekehrt stellt sich aber die Frage, was der Einfluß der verbesserten Rotations-symmetrie auf die Flavour-Symmetrie-Verletzung ist.

Wir wollen also untersuchen, ob die Berücksichtigung des linearen 3-Link-Terms

im Fall der Naik-Wirkung oder des abgewinkelten 3-Link-Terms im Fall der p4-Wirkung das Pion-Splitting verändert. Weiterhin stellt sich die Frage, ob die Fat-Link-Verbesserung des 1-Link-Terms für die Naik- und die p4-Wirkung ebenfalls eine Verbesserung der Flavour-Symmetrie gegenüber den Wirkungen mit einfachem 1-Link-Term bewirken und ob es quantitative Unterschiede zur Fat-Link-Verbesserung der Standard Wirkung gibt.

In Abschnitt 3.2 wurde die Fat-Link-Verbesserung der Flavour-Symmetrie anhand des Pion-Splittings, Δ_π , für die Standard Kogut-Susskind Wirkung diskutiert. Die Bestimmung der Massen des Goldstone Pions π , des nicht-Goldstone Pions π_2 sowie des ρ -Mesons haben wir analog dazu auf den selben mit der 1×2 -Eichwirkung auf einem $16^3 \times 30$ Gitter bei $\beta=4.1$ erzeugten quenched Konfigurationen auch für die tree-level-verbesserten Naik- und p4-Wirkungen durchgeführt[§], d.h. die in die Meson-Operatoren eingehenden Quarkpropagatoren wurden aus der Inversion der entsprechenden Fermionmatrix gewonnen. Diese Messungen wurden jeweils für die nicht fat-link-verbesserten ($\omega = 0$) und für die fat-link-verbesserten Wirkungen ($\omega = 0.2$) bei den Quarkmassen $m = 0.01, 0.02, 0.05$ gemacht. Die Resultate sind in Anhang D tabelliert.

Abbildung 4.7 zeigt das Pion-Splitting Δ_π in Abhängigkeit von m_π^2/m_ρ^2 für die Standard und die verbesserten Wirkungen. Die Messungen beantworten die oben gestellten Fragen eindeutig. Erstens gibt es keinen signifikanten Einfluß der Verbesserung der Rotationssymmetrie auf das Pionsplitting; innerhalb der Fehler stimmen die Resultate für die Standard Wirkung, die Naik-Wirkung und für die p4-Wirkung überein. Zweitens arbeitet die Fat-Link-Verbesserung für die Naik-Wirkung und für die p4-Wirkung ebenso gut wie für die Standard Wirkung; das Pion-Splitting wird in allen Fällen innerhalb der Fehler gleich stark reduziert.

[§]Die Messungen für die Naik-Wirkung stammen von A. Bicker, sie wurden im Rahmen seiner Diplomarbeit durchgeführt.

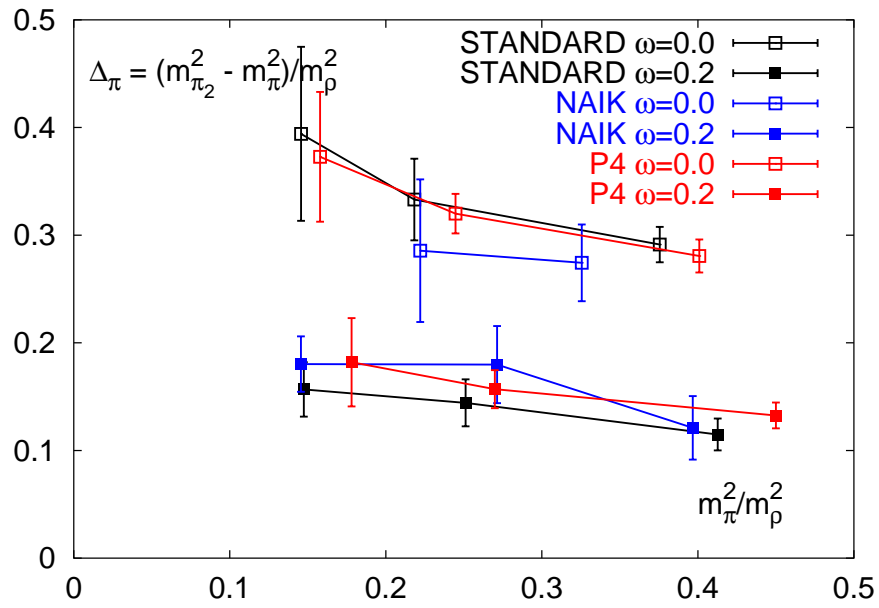


Abbildung 4.7: Pion-Splitting Δ_π über m_π^2/m_ρ^2 für die Standard Kogut-Susskind Wirkung (schwarz), die tree-level-verbesserte Naik-Wirkung (blau) und die tree-level-verbesserte p4-Wirkung (rot) jeweils für die Fat-Link-Parameter $\omega=0.0$ (offene Quadrate), $\omega=0.2$ (gefüllte Quadrate). Die Linien verbinden zusammengehörige Punkte und sind nur zur Orientierung gedacht.

Zusammenfassung

In dieser Arbeit wurde eine störungstheoretische Konstruktion von staggered Fermionwirkungen mit verbesserter Rotationssymmetrie des Fermionpropagators in Tree-level wie auch in 1-loop-Ordnung vorgestellt. Genauer wurden tree-level- und 1-loop-verbesserte Versionen der Naik- und der p4-Wirkung mit und ohne zusätzliche Fat-Link-Verbesserung betrachtet.

Die Tree-level-Verbesserung hat einen positiven Effekt auf die Dispersionsrelation, welche für die verbesserten Wirkungen in einem wesentlich größeren Impulsbereich nahe an der Kontinuum-Dispersionsrelation liegt als für die Standard Wirkung. Eine störungstheoretische Berechnung der fermionischen Tree-level- und 1-loop-Beiträge zur freien Energiedichte wurde durchgeführt, um den Einfluß der verbesserten Rotationssymmetrie sowie der Fat-Link-Verbesserung auf das Hochtemperaturverhalten zu untersuchen. Sowohl in Tree-level als auch in 1-loop-Ordnung führt die Standard staggered Wirkung zu großen cut-off-abhängigen Korrekturen zur Kontinuum-Störungstheorie. Für die tree-level-verbesserten Wirkungen findet man eine starke Reduzierung dieser ultraviolett Cut-off-Effekte; schon bei $N_\tau=4$ sind die verbleibenden Cut-off-Effekte um etwa einen Faktor 10 kleiner als für die Standard Wirkung.

In 1-loop-Ordnung hilft die Tree-level-Verbesserung wie erwartet nicht. Unsere Analyse hat gezeigt, daß die Korrekturen zur Kontinuum-Störungstheorie in 1-loop-Ordnung für die tree-level-verbesserte Naik- und p4-Wirkung von vergleichbarer Stärke sind wie für die Standard Wirkung. Darüber hinaus stellt man fest, daß Fat-Link-Verbesserung einen zu vernachlässigenden Einfluß auf das Hochtemperaturverhalten hat, d.h. die Cut-off-Effekte werden durch Fat-Links weder signifikant verstärkt noch reduziert. Auch diese Beobachtung ist nicht überraschend, da Fat-Links eingeführt wurden, um die Flavoursymmetrie-Brechung zu reduzieren, sich also eher auf das Infrarot-Verhalten auswirken.

Schließlich zeigt sich eine deutliche Reduzierung der ultraviolett Cut-off-Effekte in 1-loop-Ordnung für die Wirkungen mit verbesserter Rotationssymmetrie bis $\mathcal{O}(g^2)$. Bei $N_\tau=6$ findet man z.B. für die Standard Wirkung einen 1-loop-Beitrag zur freien Energiedichte, der um etwa einen Faktor 4 größer als der entsprechenden Kontinuumbeitrag ist; verglichen damit sind die Abweichungen an dieser Stelle für die

1-loop-verbesserte Naik-Wirkung um einen Faktor 3 und für die 1-loop-verbesserte p4-Wirkung sogar um einen Faktor 8 kleiner.

Eine Analyse des Mesonspektrums auf quenched Konfigurationen für die Standard Wirkung sowie die betrachteten Wirkungen mit verbesserter Rotationsymmetrie jeweils mit und ohne Fat-Link-Verbesserung hat gezeigt, daß die Fat-Link-Verbesserung in allen Fällen zu einer deutlichen Reduzierung des Pion-Splittings und somit der Flavoursymmetrie-Brechung führt. Auf der anderen Seite zeigen diese Messungen keinen signifikanten Einfluß der verbesserten Rotationssymmetrie auf die Flavoursymmetrie.

Aus diesen Untersuchungen läßt sich schlußfolgern, daß die beiden Komponenten, die Verbesserung der Rotationssymmetrie durch Naik- und p4-Wirkung und die Verbesserung der Flavoursymmetrie durch Einbeziehung von Fat-Links, effizient und unabhängig von einander arbeiten.

Insbesondere die 1-loop-verbesserte p4-Wirkung in Kombination mit Fat-Links ist eine sehr geeignete Kandidatin für Monte-Carlo Simulationen der vollen QCD bei endlicher Temperatur, da sie die Vorteile eines bis 1-loop-Ordnung verbesserten Hochtemperaturverhaltens und der verbesserten Flavoursymmetrie kombiniert, dabei aber die Prinzipien der Praktikabilität – Einfachheit und Lokalität – beibehält.

Danksagung

Drei Jahre sind ins Land gegangen, seit ich die wissenschaftliche Spur, an deren Ende diese Dissertation steht, aufgenommen habe. In dieser Zeit hat sich ein großer Berg unausgesprochenen Danks angehäuft, den abzutragen ich mich nur begrenzt im Stande sehe. Daher möchte ich, bevor ich einigen Personen besonders danke, erst einmal einen allgemeinen Dank in Form einiger Anmerkungen aussprechen.

- *Hammer und Sichel:*

Der beste Handwerker taugt nichts, wenn er nicht das passende Werkzeug hat. So wäre auch diese Arbeit nicht möglich gewesen, wenn nicht stets die notwendigen Arbeitsmittel, vom Radiergummi bis zum Parallelrechner, zur Verfügung gestanden hätten.

- *Brot und Spiele:*

Die finanzielle Unterstützung durch die DFG hat es mir ermöglicht, mich voll auf meine wissenschaftliche Arbeit zu konzentrieren. Dafür möchte ich mich hier bedanken.

Neben der schlichten Existenzsicherung war diese Arbeit aber vielmehr eine Tätigkeit, die mich ausgefüllt und mir viel Freude bereitet hat. Dafür ist nicht zuletzt die offene Atmosphäre und das gute Arbeitsklima in der Arbeitsgruppe verantwortlich.

- *Laurel und Hardy:*

Hier möchte ich nun doch einigen Menschen meinen besonderen Dank aussprechen (wenn auch nicht Laurel und Hardy). An erster Stelle möchte ich meinem Doktorvater Prof. Dr. Frithjof Karsch danken; mit seiner Geduld und seinem Engagement hat er der Bezeichnung Doktorvater alle Ehre gemacht.

Weiterhin gilt mein besonderer Dank Prof. Dr. Urs Heller für die Unterstützung bei den störungstheoretischen Rechnungen und deren Überprüfung, sowie Prof. Dr. Jürgen Engels und Dr. Edwin Laermann für einige sehr erhellende Diskussionen.

Der intensivste und vielseitigste Gedankenaustausch hat sicherlich mit meinen

Mitstreitern stattgefunden, bei denen ich mich für die interessante und kollegiale Zusammenarbeit bedanken möchte; um niemanden zu vergessen verzichte ich aber auf eine namentliche Nennung.

Last but not least möchte ich den Sekretärinnen unserer Arbeitsgruppe, Karin Lacey, Susi von Reder und Gudrun Eickmeyer, für die überaus großzügige Verteilung von B-Noten meinen besonderen Dank aussprechen.

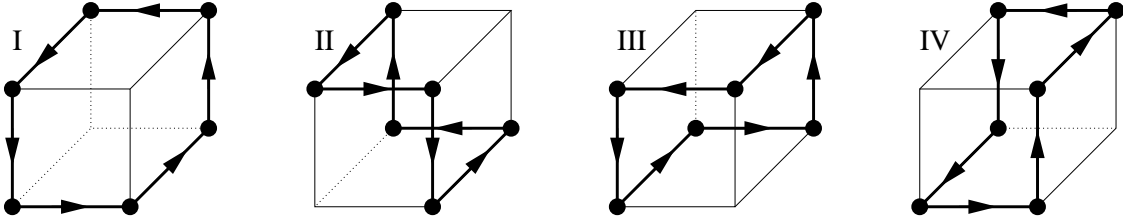
Danke, danke!!

Burkhard Sturm

Anhang A

Würfel-Operator in führender Ordnung g

Für den Würfel-Operator gibt es an jedem Gitterpunkt x und je drei paarweise verschiedene Richtungen μ, ν und ρ vier beitragende Pfade, die mit $W_{\mu\nu\rho}^J(x)$, $J=I, II, III, IV$, bezeichnet werden:



Die Beiträge des Würfel-Operators in führender Ordnung von g^2 sind damit

$$\begin{aligned}
 & \sum_{\mu < \nu < \rho} \sum_x \frac{1}{4} \sum_{J=I}^{IV} \left(1 - \frac{1}{N} \operatorname{Re} \operatorname{Tr} W_{\mu\nu\rho}^J(x) \right) \\
 &= \frac{g^2}{2N} \operatorname{Tr} \int_k \sum_{\mu < \nu < \rho} \left\{ 2 [\sin^2(k_\nu/2 + k_\rho/2) + \sin^2(k_\nu/2 - k_\rho/2)] A_\mu(k) A_\mu(-k) \right. \\
 & \quad + 2 [\sin^2(k_\mu/2 + k_\rho/2) + \sin^2(k_\mu/2 - k_\rho/2)] A_\nu(k) A_\nu(-k) \\
 & \quad + 2 [\sin^2(k_\mu/2 + k_\nu/2) + \sin^2(k_\mu/2 - k_\nu/2)] A_\rho(k) A_\rho(-k) \\
 & \quad - [\sin(k_\nu/2 + k_\rho/2) + \sin(k_\nu/2 - k_\rho/2)] [\sin(k_\mu/2 + k_\rho/2) + \sin(k_\mu/2 - k_\rho/2)] \\
 & \quad \quad \cdot [A_\mu(k) A_\nu(-k) + A_\nu(k) A_\mu(-k)] \\
 & \quad - [\sin(k_\rho/2 + k_\nu/2) + \sin(k_\rho/2 - k_\nu/2)] [\sin(k_\mu/2 + k_\nu/2) + \sin(k_\mu/2 - k_\nu/2)] \\
 & \quad \quad \cdot [A_\mu(k) A_\rho(-k) + A_\rho(k) A_\mu(-k)] \left. \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - [\sin(k_\rho/2 + k_\mu/2) + \sin(k_\rho/2 - k_\mu/2)] [\sin(k_\nu/2 + k_\mu/2) + \sin(k_\nu/2 - k_\mu/2)] \\
& \quad \cdot [A_\rho(k)A_\nu(-k) + A_\nu(k)A_\rho(-k)] \Big\} \\
= & \frac{g^2}{2N} \text{Tr} \int_k \left\{ \sum_\mu A_\mu(k) \left[\sum_{\sigma, \rho: \sigma \neq \rho \neq \mu} (\sin^2(k_\sigma/2 + k_\rho/2) + \sin^2(k_\sigma/2 - k_\rho/2)) \right] A_\mu(-k) \right. \\
& - \sum_{\mu, \nu: \mu \neq \nu} A_\mu(k) \left[\sum_{\rho: \mu \neq \rho \neq \nu} (\sin(k_\mu/2 + k_\rho/2) + \sin(k_\mu/2 - k_\rho/2)) \right. \\
& \quad \left. \left. \cdot (\sin(k_\nu/2 + k_\rho/2) + \sin(k_\nu/2 - k_\rho/2)) \right] A_\nu(-k) \right\} \\
= & \frac{g^2}{2N} \text{Tr} \int_k \left\{ \sum_\mu A_\mu(k) \left[\sum_{\sigma, \rho: \sigma \neq \rho \neq \mu} 2 (s_\sigma^2(k/2) + s_\rho^2(k/2) - 2s_\sigma^2(k/2)s_\rho^2(k/2)) \right] A_\mu(-k) \right. \\
& - \sum_{\mu, \nu: \mu \neq \nu} A_\mu(k) \left[\sum_{\rho: \mu \neq \rho \neq \nu} 4 (s_\mu(k/2)s_\nu(k/2) - s_\mu(k/2)s_\nu(k/2)s_\rho^2(k/2)) \right] A_\nu(-k) \Big\} ,
\end{aligned}$$

wobei die Abkürzung $s_\mu(k) \equiv \sin(k_\mu)$ verwendet wird.

Damit ergibt sich für den Beitrag $G_{\mu, \nu}^{(2)}$ zum inversen Propagator

$$G_{\mu, \nu}^{(2)} = D_\mu(k)\delta_{\mu\nu} - E_{\mu, \nu}(k)(1 - \delta_{\mu\nu}) \quad (\text{A.1})$$

$$D_\mu(k) = \sum_{\sigma, \rho: \sigma \neq \rho \neq \mu} 2 (s_\sigma^2(k/2) + s_\rho^2(k/2) - 2s_\sigma^2(k/2)s_\rho^2(k/2)) \quad (\text{A.2})$$

$$E_{\mu, \nu}(k) = \sum_{\rho: \mu \neq \rho \neq \nu} 4 (s_\mu(k/2)s_\nu(k/2)(1 - s_\rho^2(k/2))) \quad (\text{A.3})$$

Anhang B

Definitionen der Dimension-6 Fermionoperatoren

Isospektrale Eichfeld-Transformation

Die isospektrale Transformation der Eichfelder ist definiert durch

$$\tilde{U}_\mu(n) \equiv \exp[\epsilon X_\mu(n)] U_\mu(n) \quad , \quad (\text{B.1})$$

wobei ϵ ein infinitesimaler Parameter ist. Die $SU(N_c)$ Matrix $X_\mu(n)$ ist durch den anti-hermiteschen, spurlosen Teil eines Feldes $Y_\mu(n)$ definiert:

$$X_\mu(n) = Y_\mu(n) - Y_\mu^\dagger(n) - \frac{1}{N_c} \text{tr} [Y_\mu(n) - Y_\mu^\dagger(n)] \quad , \quad (\text{B.2})$$

$$Y_\mu(n) = \frac{1}{4} \sum_\nu \left\{ U_\nu(n) U_\mu(n + \hat{\nu}) U_\nu^\dagger(n + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n) \right. \\ \left. - U_\mu(n) U_\nu^\dagger(n - \hat{\nu} + \hat{\mu}) U_\mu^\dagger(n - \hat{\nu}) U_\nu(n - \hat{\nu}) \right\} \quad . \quad (\text{B.3})$$

Definitionen zu den bilinearen Fermionoperatoren

Bei den in Abschnitt 3.1 definierten bilinearen Fermionoperatoren sind sämtliche Indizes sowie die Eichfelder unterdrückt, sie sind wie folgt definiert:

$$\bar{\chi} \mathcal{B} \chi \equiv \sum_{y, y'} \sum_{\xi, \xi'} \sum_{a, b} \bar{\chi}_\xi^a(y) \mathcal{B}_{\xi\xi'}(y, y') U^{ab}(y + \xi, y' + \xi') \chi_{\xi'}^b(y') \quad (\text{B.4})$$

Dabei ist $U(x, x')$ das Mittel von Link-Produkten entlang Pfaden von x nach x' .

Die für die Definition der bilinearen Fermionoperatoren benötigten diskreten Differentialoperatoren sind mit dieser Kurzschreibweise definiert durch

$$\mathcal{D} \equiv \sum_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} , \quad (\text{B.5})$$

$$\mathcal{D}^2 \equiv \sum_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} , \quad (\text{B.6})$$

$$\mathcal{D}^3 \equiv \sum_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} , \quad (\text{B.7})$$

$$\mathcal{D}\mathcal{D}\mathcal{D} \equiv \sum_{\mu, \nu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} \overline{(\gamma_{\nu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\nu} \overline{(\gamma_{\mu} \otimes \mathbb{1})} \mathcal{D}_{\mu} , \quad (\text{B.8})$$

wobei

$$(\mathcal{D}_{\mu})_{\xi\xi'}(y, y') = \bar{D}_{\mu}(y, y') \delta_{\xi\xi'} + a \overline{(\gamma_{\mu 5} \otimes t_{\mu 5})}_{\xi\xi'} \bar{\Delta}_{\mu}(y, y') , \quad (\text{B.9})$$

mit

$$\bar{D}_{\mu}(y, y') = \frac{1}{4a} [\delta(y + 2\hat{\mu} - y') - \delta(y - 2\hat{\mu} - y')] , \quad (\text{B.10})$$

$$\bar{\Delta}_{\mu}(y, y') = \frac{1}{4a^2} [\delta(y + 2\hat{\mu} - y') + \delta(y - 2\hat{\mu} - y') - 2\delta(y - y')] . \quad (\text{B.11})$$

Mit diesen Definitionen läßt sich z.B. die Kogut-Susskind Wirkung sehr kompakt schreiben:

$$S_F^{(KS)} = (2a^4) \bar{\chi} (\mathcal{D} + m) \chi . \quad (\text{B.12})$$

Definitionen zu den Vier-Fermionoperatoren

Die Phasenfaktoren $P_{\mu}^{(i)}(c)$ für die 18 Vier-Fermionoperatoren sind wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} P_{\mu}^{(3)}(c) &= \eta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(4)}(c) &= \varepsilon(c) \eta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(5)}(c) &= \varepsilon(c) \tau_{\mu}(c) \eta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(6)}(c) &= \tau_{\mu}(c) \eta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(7)}(c) &= \tau_{\mu}(c) \zeta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(8)}(c) &= \varepsilon(c) \tau_{\mu}(c) \zeta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(9)}(c) &= \varepsilon(c) \zeta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(10)}(c) &= \zeta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(11)}(c) &= \eta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(12)}(c) &= \tau_{\mu}(c) \eta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(13)}(c) &= \zeta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(14)}(c) &= \tau_{\mu}(c) \zeta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(15)}(c) &= \varepsilon(c) \eta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(16)}(c) &= \varepsilon(c) \tau_{\mu}(c) \eta_{\mu}(c) , \\ P_{\mu}^{(17)}(c) &= \varepsilon(c) \zeta_{\mu}(c) , & P_{\mu}^{(18)}(c) &= \varepsilon(c) \tau_{\mu}(c) \zeta_{\mu}(c) , \end{aligned}$$

wobei

$$\tau_\mu(c) = \frac{1}{3} \sum_{\nu \neq \mu} (-1)^{c_\nu} ,$$

$$\eta_\mu(c) = (-1)^{c_1 + \dots + c_{\mu-1}} ,$$

$$\zeta_\mu(c) = (-1)^{c_{\mu+1} + \dots + c_4} ,$$

$$\varepsilon(c) = (-1)^{c_1 + \dots + c_4} ,$$

$$\eta_5(c) = \prod_{\mu=1}^4 \eta_\mu(c) .$$

Anhang C

Anhang zu Kapitel 4

Wir führen hier die expliziten Resultate sowie einige technische Details der störungstheoretischen Rechnungen auf, die in Kapitel 4 behandelt wurden. Der Aufbau ist dabei wie folgt: In Teil C.1 definieren wir die grundlegenden Terme und Funktionen, auf die in den darauffolgenden Teilen verwiesen wird. In Teil C.2 und Teil C.3 sind Details zur Bestimmung der Tree-level- bzw. der 1-loop-Koeffizienten dargestellt. In Teil C.4 sind die expliziten algebraischen Resultate der 1-loop-Berechnung der fermionischen Beiträge zur freien Energiedichte gegeben, in Teil C.5 sind die entsprechenden Resultate der numerischen Impulsintegrationen tabelliert.

C.1 Allgemeine 1-loop-Resultate und Definitionen

Für die trigonometrischen Funktionen benutzen wir die Abkürzungen

$$\begin{aligned} s_\mu(p) &\equiv \sin(p_\mu) \quad , \\ c_\mu(p) &\equiv \cos(p_\mu) \quad . \end{aligned}$$

Der inverse Gluonpropagator für die 1×2 -Eichwirkung wurde in [3] berechnet. Für die Standard Plaquette-Wirkung sowie die 1×2 -Wirkung kann man den Gluonpropagator in folgender Form schreiben:

$$\begin{aligned} \Delta_{G\mu,\nu}(k) &= D_{G\mu}(k)\delta_{\mu,\nu} - E_{G\mu,\nu}(k) + \xi g_\mu(k)g_\nu(k) \quad , \\ D_{G\mu}(k) &= 4 a_{1,1} \sum_\nu s_\nu^2(k/2) - 16 a_{1,2} \sum_\nu s_\nu^2(k/2) (2 - s_\nu^2(k/2) - s_\mu^2(k/2)) \quad , \\ E_{G\mu,\nu}(k) &= 4 a_{1,1} s_\mu(k/2)s_\nu(k/2) \\ &\quad - 16 a_{1,2} s_\mu(k/2)s_\nu(k/2) (2 - s_\nu^2(k/2) - s_\mu^2(k/2)) \quad , \end{aligned}$$

mit $a_{1,1} \equiv 1$, $a_{1,2} \equiv 0$ für die Standard Plaquette-Wirkung und $a_{1,1} \equiv 5/3$, $a_{1,2} \equiv -1/12$ für die 1×2 -Wirkung. In beiden Fällen wählen wir den Eichfixierungsterm $g_\mu(k) = 2s_\mu(k/2)$ sowie Feynman-Eichung $\xi = 1$.

Die Basis der 1-loop-Rechnungen ist eine Entwicklung der Fermionwirkung in Potenzen der Kopplung g :*

$$S_F = S_F^{(0)} + gS_F^{(1)} + g^2S_F^{(2)} + g^2\tilde{S}_F^{(0)} + \mathcal{O}(g^3) . \quad (\text{C.1})$$

Dafür entwickelt man die Exponentialdarstellung der Linkvariablen $U_\mu(x) = \exp(igaA_\mu(x))$, mit den Eichfeldern $A_\mu \equiv \sum_{b=1}^{N_c^2-1} A_\mu^b \lambda^b$ und der Normierung $2\text{tr} \lambda^a \lambda^b = \delta_{ab}$ der Generatoren der $SU(N_c)$ Eichgruppe λ^a . Den Gitterabstand setzen wir auf $a = 1$. Im Impulsraum findet man dann

$$\begin{aligned} S_F^{(0)} &= \int_p \bar{\psi}(p) \left\{ i \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu(p) + m \right\} \psi(p) , \\ \tilde{S}_F^{(0)} &= i \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int_p \bar{\psi}(p) \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu^{(2)}(p) \psi(p) , \\ S_F^{(1)} &= i \int_p \int_k \bar{\psi}(p) \sum_\mu \gamma_\mu \hat{S}_\mu^{(1)}(p, k) \psi(p - k) , \\ S_F^{(2)} &= -\frac{i}{2} \int_p \int_{k_1} \int_{k_2} \bar{\psi}(p) \sum_\mu \gamma_\mu \hat{S}_\mu^{(2)}(p, k_1, k_2) \psi(p - k_1 - k_2) , \end{aligned}$$

mit

$$\begin{aligned} \hat{S}_\mu^{(1)}(p, k) &= \sum_\rho K_{\mu;\rho}(p, k) A_\rho(k) , \\ \hat{S}_\mu^{(2)}(p, k_1, k_2) &= \sum_{\rho,\sigma} L_{\mu;\rho,\sigma}(p, k_1, k_2) A_\rho(k_1) A_\sigma(k_2) . \end{aligned}$$

Hier haben wir die folgenden Definitionen benutzt, auf die auch in C.2 - C.4 Bezug genommen wird:

$$\begin{aligned} h_\mu(p) &= 2 s_\mu(p) \left[c_{1,0}^{(0)} + 2 c_{1,2}^{(0)} \sum_{\nu \neq \mu} c_\nu(2p) \right] + 2 c_{3,0}^{(0)} s_\mu(3p) , \\ h_\mu^{(2)}(p) &= 2 s_\mu(p) \left[c_{1,0}^{(2)} + 2 c_{1,2}^{(2)} \sum_{\nu \neq \mu} c_\nu(2p) \right] + 2 c_{3,0}^{(2)} s_\mu(3p) , \\ K_{\mu;\rho}(p, k) &= c_{1,0}^{(0)} \mathcal{A}_{\mu;\rho}^{\text{fat}}(\omega; p, k) + c_{3,0}^{(0)} \mathcal{A}_{\mu;\rho}^{(3,0)}(p, k) + c_{1,2}^{(0)} \mathcal{A}_{\mu;\rho}^{(1,2)}(p, k) , \\ L_{\mu;\rho,\sigma}(p, k_1, k_2) &= c_{1,0}^{(0)} \mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{\text{fat}}(\omega; p, k_1, k_2) + c_{3,0}^{(0)} \mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{(3,0)}(p, k_1, k_2) + c_{1,2}^{(0)} \mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{(1,2)}(p, k_1, k_2) , \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

*Die Bezeichnung $\tilde{S}_F^{(0)}$ soll daran erinnern, daß dieser Term eigentlich von einem tree-level Diagramm stammt; dieses enthält aber die 1-loop-Koeffizienten, wodurch dieser Term zu $\mathcal{O}(g^2)$ verschoben wird.

wobei

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}_{\mu;\rho}^{\text{fat}}(\omega; p, k) &= 2 c_\mu(p - k/2) \\
&\cdot \left[\delta_{\mu,\rho} - \frac{4\omega}{1 + 6\omega} \left(\delta_{\mu,\rho} \sum_{\nu \neq \mu} s_\nu^2(k/2) - (1 - \delta_{\mu,\rho}) s_\mu(k/2) s_\rho(k/2) \right) \right], \\
\mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{\text{fat}}(\omega; p, k_1, k_2) &= 2 s_\mu(p - k_1/2 - k_2/2) \\
&\cdot \left[\delta_{\mu,\rho} \delta_{\mu,\sigma} - \frac{4\omega}{1 + 6\omega} \left(\delta_{\mu,\rho} \delta_{\mu,\sigma} \sum_{\nu \neq \mu} s_\nu^2(k_1/2 + k_2/2) \right. \right. \\
&\quad + 2 (1 - \delta_{\mu,\rho}) \delta_{\rho,\sigma} s_\mu(k_1/2) s_\mu(k_2/2) c_\rho(k_1/2 + k_2/2) \\
&\quad - \delta_{\mu,\rho} (1 - \delta_{\mu,\sigma}) \{ s_\mu(k_2/2) - i c_\mu(k_2/2) \} s_\sigma(k_1 + k_2/2) \\
&\quad \left. \left. - \delta_{\mu,\sigma} (1 - \delta_{\mu,\rho}) \{ s_\mu(k_1/2) + i c_\mu(k_1/2) \} s_\sigma(k_2 + k_1/2) \right) \right], \\
\mathcal{A}_{\mu;\rho}^{(3,0)}(p, k) &= 2 \delta_{\mu,\rho} c_\mu(3p - 3k/2) (3 - 4s_\mu^2(k/2)) , \\
\mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{(3,0)}(p, k_1, k_2) &= 2 \delta_{\mu,\rho} \delta_{\mu,\sigma} s_\mu(3p - 3k_1/2 - 3k_2/2) [9 - 4s_\mu^2(k_1/2 + k_2/2) \\
&\quad - 4s_\mu^2(k_1/2) - 4s_\mu^2(k_2/2) - 4s_\mu^2(k_1/2 - k_2/2)] \\
\mathcal{A}_{\mu;\rho}^{(1,2)}(p, k) &= 4 c_\mu(p - k/2) \delta_{\mu,\rho} \sum_{\nu \neq \mu} c_\nu(2p - k) c_\nu(k) \\
&\quad - 8 (1 - \delta_{\mu,\rho}) s_\mu(p - k/2) c_\mu(k/2) s_\rho(2p - k) c_\rho(k/2) , \\
\mathcal{B}_{\mu;\rho,\sigma}^{(1,2)}(p, k_1, k_2) &= 4 s_\mu(p - k_1/2 - k_2/2) \\
&\cdot \left[\delta_{\mu,\rho} \delta_{\mu,\sigma} \sum_{\nu \neq \mu} c_\nu(k_1 + k_2) c_\nu(2p - k_1 - k_2) \right. \\
&\quad + 2 (1 - \delta_{\mu,\rho}) \delta_{\rho,\sigma} c_\mu(k_1/2 + k_2/2) \\
&\quad \left. \cdot \left(c_\rho(2p - 3k_1/2 - k_2/2) + c_\rho(2p - k_1 - k_2) c_\rho(k_1/2 + k_2/2) \right) \right] \\
&\quad + 8 \delta_{\mu,\rho} (1 - \delta_{\mu,\sigma}) c_\rho(p - k_1/2) c_\sigma(k_2/2) s_\sigma(2p - 2k_1 - k_2) \\
&\quad + 8 \delta_{\mu,\sigma} (1 - \delta_{\mu,\rho}) c_\sigma(p - k_1 - k_2/2) c_\rho(k_1/2) s_\rho(2p - k_1) .
\end{aligned}$$

Die Integralsymbole mit Indizes für fermionische und gluonische Impulse, die mit den Buchstaben p bzw. k gekennzeichnet werden, bezeichnen auf einem endlichen $N_\sigma^3 \times N_\tau$ Gitter tatsächlich endliche Summen über die Impulsmoden. Sie sind definiert durch:

$$\begin{aligned}
\int_k &= \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \sum_k \text{ with } \left\{ \begin{array}{l} k_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{N_\sigma} , \quad -\frac{1}{2}N_\sigma \leq n_\mu \leq \frac{1}{2}N_\sigma - 1, \quad \mu \neq 4 \\ k_4 = \frac{2\pi n_4}{N_\tau} , \quad -\frac{1}{2}N_\tau \leq n_4 \leq \frac{1}{2}N_\tau - 1 \end{array} \right. , \\
\int_p &= \frac{1}{N_\sigma^3 N_\tau} \sum_p \text{ with } \left\{ \begin{array}{l} p_\mu = \frac{2\pi n_\mu}{N_\sigma} , \quad 0 \leq n_\mu \leq N_\sigma - 1, \quad \mu \neq 4 \\ p_4 = \frac{\pi(2n_4+1)}{N_\tau} , \quad 0 \leq n_4 \leq N_\tau - 1 \end{array} \right. .
\end{aligned}$$

Die Verschiebung der zeitlichen Fermion-Impulse, p_4 , spiegelt die antiperiodischen Randbedingungen in Zeitrichtung wieder. Da wir den Limes unendlichen räumlichen Volumens betrachten, wird die Summe zu einem Integral über die Brillouin-Zone, $1/N_\sigma \sum_{l_i} \rightarrow 1/(2\pi) \int_{-\pi}^{\pi} dl_i$, $i = 1, 2, 3$, für fermionische und gluonische Impulse, $l = p, k$. Das selbe gilt für die Zeitrichtung in den Temperatur Null Beiträgen.

Die Pfadintegrale über die Fermion- und die Gluonfelder werden unter Benutzung der folgenden Identitäten berechnet:

$$\begin{aligned} \langle A_\mu^a(k) A_\nu^b(-l) \rangle_0 &= \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \Delta_G^{-1}{}_{\mu,\nu}(k) \delta_{k,l} \delta^{a,b} , \\ \langle \bar{\psi}_\alpha^a(p) \psi_\beta^b(q) \rangle_0 &= \frac{\left(i \sum_\mu \gamma_\mu h_\mu(p) - m \right)_{\alpha,\beta}}{s_F(p)} \delta_{p,q} \delta^{a,b} , \end{aligned}$$

mit

$$s_F(p) = \sum_\mu h_\mu^2(p) + m^2 .$$

C.2 Tree-level-Koeffizienten für die verbesserte Rotationssymmetrie

Eine Entwicklung des freien inversen Fermionpropagators bis Ordnung p^4 liefert:

$$D^{(0)}(p) = \sum_\mu h_\mu(p) h_\mu(p) = \sum_\mu A p_\mu^2 \left(A + 2B_1 p_\mu^2 + 2B_2 \sum_{\nu \neq \mu} p_\nu^2 \right) + \mathcal{O}(p^6) ,$$

mit den Koeffizienten

$$\begin{aligned} A &= 2c_{1,0}^{(0)} + 12c_{1,2}^{(0)} + 6c_{3,0}^{(0)} , \\ B_1 &= -\frac{1}{3}c_{1,0}^{(0)} - 2c_{1,2}^{(0)} - 9c_{3,0}^{(0)} , \\ B_2 &= -8c_{1,2}^{(0)} . \end{aligned}$$

Offensichtlich muß die Bedingung $B_1 = B_2$ erfüllt sein, um Rotationssymmetrie bis zur Ordnung p^4 zu bekommen, was zu der Bedingung führt:

$$c_{1,0}^{(0)} + 27 c_{3,0}^{(0)} + 6 c_{1,2}^{(0)} = 24 c_{1,2}^{(0)} .$$

Die Entwicklung zeigt, daß man sogar verschwindende $\mathcal{O}(p^4)$ Beiträge bekommt, wenn man $c_{1,2}^{(0)} \equiv 0$ setzt (Naik-Wirkung). Dies entspricht sogar einer $\mathcal{O}(a^2)$ Verbesserung.

C.3 Verbesserte Rotationssymmetrie in $\mathcal{O}(g^2)$

Die expliziten Ausdrücke für die $\mathcal{O}(g^2)$ Beiträge zum Fermionpropagator sind:

$$\begin{aligned} D_\mu^{(0)}(p) &= -h_\mu(p) , \\ D_\mu^{(2)}(p) &= -\frac{N_c^2 - 1}{2N_c} h_\mu^{(2)}(p) , \\ \Sigma_\mu(p) &= \mathcal{K}_\mu(p) + \mathcal{L}_\mu(p) , \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{K}_\mu(p) &= \frac{N_c^2 - 1}{2N_c} \int_k \frac{1}{s_F(p-k)} \sum_\nu \sum_{\rho, \bar{\rho}} \left[h_\mu(p-k) K_{\nu; \rho}(p, k) K_{\nu; \bar{\rho}}(p-k, -k) \right. \\ &\quad \left. - 2h_\nu(p-k) K_{\mu; \rho}(p, k) K_{\nu; \bar{\rho}}(p-k, -k) \right] \Delta_{G^{-1} \rho, \bar{\rho}}^{-1}(k) , \\ \mathcal{L}_\mu(p) &= -\frac{N_c^2 - 1}{4N_c} \int_k \sum_{\rho, \bar{\rho}} L_{\mu; \rho, \bar{\rho}}(p, k, -k) \Delta_{G^{-1} \rho, \bar{\rho}}^{-1}(k) . \end{aligned}$$

Für den $\mathcal{L}_\mu(p)$ Term, der vom $S_F^{(2)}$ Beitrag stammt, kann man die p -Abhängigkeit ausfaktorisieren. Dafür muß man die trigonometrischen Funktionen von Summen von p und k als Summen von in p und k abhängige trigonometrischen Funktionen faktorisierte Terme umformen (z.B. $\sin(p \pm k) = \sin(p) \cos(k) \pm \cos(p) \sin(k)$). Berücksichtigt man, daß $\Delta_{G^{-1} \mu, \mu}^{-1}(k)$ eine gerade Funktion aller k -Komponenten ist und daß $\Delta_{G^{-1} \mu, \nu}^{-1}(k)$ eine ungerade Funktion von k_μ und k_ν und eine gerade Funktion der übrigen k -Komponenten ist, so findet man, daß viele Terme ungerade in einer k -Komponente sind und daher unter der Integration verschwinden. Die verbleibenden Terme, ohne die Einbeziehung von Fat-Links, d.h. $\omega = 0$, lassen sich auf drei gluonische Integrale zurückführen:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\mu(p) &= -\frac{N_c^2 - 1}{4N_c} \left\{ s_\mu(p) c_{1,0}^{(0)} 2 \mathcal{I}_1 + s_\mu(3p) c_{3,0}^{(0)} 2 \mathcal{I}_2 \right. \\ &\quad \left. + s_\mu(p) \sum_{\nu \neq \mu} c_\nu(2p) c_{1,2}^{(0)} (4 \mathcal{I}_1 + 16 \mathcal{I}_3) \right\} , \end{aligned}$$

wobei die gluonischen Integrale definiert sind als

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_1 &\equiv \int_k \Delta_{G^{-1} 1,1}^{-1}(k) , \\ \mathcal{I}_2 &\equiv \int_k (9 - 8s_1^2(k/2) - 4s_1^2(k)) \Delta_{G^{-1} 1,1}^{-1}(k) , \\ \mathcal{I}_3 &\equiv \int_k (c_2^2(k/2) \Delta_{G^{-1} 2,2}^{-1}(k) - s_1(k/2) c_2(k/2) s_2(k) \Delta_{G^{-1} 1,2}^{-1}(k)) . \end{aligned}$$

Eine präzise Berechnung dieser Integrale mittels Gauß-Legendre Integration liefert

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_1 &= 0.1282908 \ , \\ \mathcal{I}_2 &= 0.0752730 \ , \\ \mathcal{I}_3 &= 0.5074740 \ .\end{aligned}$$

C.4 Beiträge zur freien Energiedichte

Die expliziten Ausdrücke für die fermionischen Beiträge zur freien Energiedichte bis $\mathcal{O}(g^2)$ sind:

$$\begin{aligned}f_F^{(0)} &= -2N_c \int_p \ln [s_F(p)] \ , \\ \left\langle \left(S_F^{(1)} \right)^2 \right\rangle_0 &= 2(N_c^2 - 1) \int_p \int_k \frac{1}{s_F(p)s_F(p-k)} \sum_{\mu, \bar{\mu}} \left\{ \right. \\ &\quad \left[\delta_{\mu, \bar{\mu}} \left(\sum_{\rho} h_{\rho}(p)h_{\rho}(p-k) + m^2 \right) - 2h_{\mu}(p)h_{\bar{\mu}}(p-k) \right] \\ &\quad \left. \sum_{\rho, \bar{\rho}} K_{\mu; \rho}(p, k) K_{\bar{\mu}; \bar{\rho}}(p-k, -k) \Delta_{G^{-1} \rho, \bar{\rho}}^{-1}(k) \right\} \ , \\ \left\langle S_F^{(2)} \right\rangle_0 &= (N_c^2 - 1) \int_p \int_k \frac{1}{s_F(p)} \sum_{\mu} h_{\mu}(p) \sum_{\rho, \bar{\rho}} L_{\mu; \rho, \bar{\rho}}(p, k, -k) \Delta_{G^{-1} \rho, \bar{\rho}}^{-1}(k) \ , \\ \left\langle \tilde{S}_F^{(0)} \right\rangle_0 &= -(N_c^2 - 1) \int_p \sum_{\mu} \frac{h_{\mu}(p)h_{\mu}^{(2)}(p)}{s_F(p)} \ .\end{aligned}$$

Im $\left\langle S_F^{(2)} \right\rangle_0$ Beitrag kann die k Integration/Summe wiederum ähnlich zum $\mathcal{L}_{\mu}(p)$ Term in C.3 faktorisiert werden.

C.5 Numerische Resultate zur freien Energiedichte

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate der numerischen Integration der fermionischen Beiträge zur freien Energiedichte bis $\mathcal{O}(g^2)$.

Den Ordnung g^2 Beitrag kann man wie folgt als Funktion des Fat-Link-Parameters ω und des 1-loop-Koeffizienten $c_{1,0}^{(2)}$ parametrisieren:

$$f_F^{(2)} / f_{F,\text{cont}}^{(2)} \left(N_\tau; \omega, c_{1,0}^{(2)} \right) = f_0(N_\tau) + \frac{\omega}{1+6\omega} \cdot f_1(N_\tau) + \frac{\omega^2}{(1+6\omega)^2} \cdot f_2(N_\tau) + c_{1,0}^{(2)} \cdot \tilde{f}(N_\tau) \quad (\text{C.3})$$

Für die Beiträge f_0 , f_1 und f_2 sind für $N_\tau > 8$ die zu unendlicher Anzahl von Gauß-Stützstellen extrapolierten Werte angegeben.

Kogut-Susskind Wirkung								
S_G :			1×1			1×2		
N_τ	$f_F^{(0)} / f_{F,\text{cont}}^{(0)}$		f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2
4	2.14061		4.1408	0.4564	-2.9672	4.1697	0.0105	-0.8295
6	1.77114		3.9245	0.1039	-0.0622	3.9590	-0.1099	-0.5338
8	1.4222		2.8616	0.0248	-0.0175	2.8798	-0.0842	-0.2879
10	1.23741		2.0999	0.0378	-0.0396	2.1096	-0.0330	-0.1722
12	1.14708		1.6659	0.0884	-0.0970	1.6743	0.0244	-0.1453
14	1.10025					1.4273	0.0759	-0.1557
16	1.07317					1.2791	0.0976	-0.1593
Naik-Wirkung								
S_G :			1×1			1×2		
N_τ	$f_F^{(0)} / f_{F,\text{cont}}^{(0)}$	\tilde{f}	f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2
4	0.806962	-421.334	-4.6747	3.7279	2.547	-3.7410	2.4637	1.1267
6	0.771763	-305.078	-4.0217	2.6339	1.993	-3.2943	1.7992	1.1297
8	0.930269	-126.329	-1.0780	1.0912	0.830	-0.7788	0.7333	0.4938
10	0.980944	-64.616	0.0205	0.5611	0.421	0.1683	0.3750	0.2399
12	0.992625	-42.950	0.3760	0.3845	0.266	0.4688	0.2699	0.1325
14	0.996277	-31.293	0.5521	0.2839	0.189	0.6201	0.1997	0.0928
16	0.997804	-23.773				0.7035	0.1819	0.0376
p4-Wirkung								
S_G :			1×1			1×2		
N_τ	$f_F^{(0)} / f_{F,\text{cont}}^{(0)}$	\tilde{f}	f_0	f_1	f_2	f_0	f_1	f_2
4	0.593214	261.896	-5.3639	3.6069	2.2051	-4.4879	2.8810	1.2494
6	0.937833	55.756	-0.5890	0.7725	0.4707	-0.3779	0.6038	0.2762
8	0.977802	45.231	-0.0070	0.6173	0.3875	0.1458	0.4691	0.2172
10	0.988882	30.796	0.3272	0.4205	0.2536	0.4288	0.3207	0.1431
12	0.994425	21.058	0.5453	0.2953	0.1462	0.6134	0.2210	0.0832
14	0.996971	15.428	0.6749	0.2115	0.0792	0.7220	0.1517	0.0488
16	0.998121	11.766	0.7753	0.1066	0.0641	0.8040	0.0654	0.0516

Anhang D

Mesonspektrum

Die folgenden Tabellen enthalten die Resultate für die Massen des Goldstone Pions π , des nicht-Goldstone Pions π_2 und des ρ -Mesons, welche auf quenched Konfigurationen, die auf einem $16^3 \times 30$ Gitter bei $\beta=4.1$ mit der tree-level-verbesserten 1×2 -Eichwirkung erzeugt wurden und bei verschiedenen Quarkmassen m_q und Fat-Link-Parametern ω gemessen wurden. Die Resultate für die Naik-Wirkung wurden von A. Bicker im Rahmen seiner Diplomarbeit gewonnen.

Die Werte für das Pion-Splitting $\Delta_\pi = (m_{\pi_2}^2 - m_\pi^2)/m_\rho^2$ sowie für m_π^2/m_ρ^2 entstammen den Resultaten für m_π , m_{π_2} und m_ρ , die Fehler sind also mittels quadratischer Fehlerfortpflanzung berechnet worden.

Kogut-Susskind Wirkung						
ω	m_q	m_π	m_{π_2}	m_ρ	Δ_π	m_π^2/m_ρ^2
0.0	0.01	0.2805 (10)	0.54 (4)	0.735 (30)	0.146 (12)	0.394 (81)
0.0	0.02	0.3901 (5)	0.62 (2)	0.835 (25)	0.218 (13)	0.333 (38)
0.0	0.05	0.5981 (5)	0.797 (7)	0.976 (15)	0.376 (12)	0.291 (16)
0.2	0.01	0.2611 (12)	0.375 (8)	0.68 (5)	0.147 (22)	0.157 (25)
0.2	0.02	0.3658 (9)	0.459 (4)	0.73 (3)	0.251 (21)	0.144 (22)
0.2	0.05	0.5705 (5)	0.645 (3)	0.888 (15)	0.413 (14)	0.115 (15)
0.4	0.01	0.261 (1)	0.345 (15)	0.66 (5)	0.156 (237)	0.117 (34)
0.4	0.02	0.3654 (6)	0.442 (7)	0.723 (25)	0.255 (177)	0.118 (21)
0.4	0.05	0.5693 (3)	0.635 (3)	0.865 (15)	0.433 (150)	0.106 (16)

p4-Wirkung						
ω	m_q	m_π	m_{π_2}	m_ρ	Δ_π	m_π^2/m_ρ^2
0.0	0.01	0.300 (1)	0.55 (3)	0.755 (40)	0.158 (17)	0.373 (60)
0.0	0.02	0.418 (1)	0.635 (8)	0.845 (20)	0.245 (12)	0.320 (18)
0.0	0.05	0.6427 (3)	0.838 (6)	1.015 (15)	0.401 (12)	0.281 (15)
0.2	0.01	0.2785 (15)	0.396 (20)	0.660 (35)	0.178 (19)	0.181 (41)
0.2	0.02	0.3896 (10)	0.490 (8)	0.750 (15)	0.270 (11)	0.157 (18)
0.2	0.05	0.6091 (5)	0.693 (4)	0.908 (10)	0.450 (10)	0.133 (12)

Naik-Wirkung						
ω	m_q	m_π	m_{π_2}	m_ρ	Δ_π	m_π^2/m_ρ^2
0.0	0.02	0.377 (5)	0.57 (2)	0.8 (1)	0.222 (55)	0.285 (66)
0.0	0.05	0.582 (4)	0.79 (1)	1.02 (5)	0.325 (32)	0.274 (36)
0.2	0.01	0.248 (6)	0.371 (6)	0.65 (5)	0.146 (23)	0.180 (26)
0.2	0.02	0.349 (6)	0.450 (6)	0.67 (4)	0.271 (34)	0.180 (36)
0.2	0.05	0.548 (5)	0.626 (5)	0.87 (3)	0.397 (28)	0.121 (29)

Literaturverzeichnis

- [1] K. Wilson und J. Kogut, Phys. Rep. C12 (1974) 75; K. Wilson, Rev. Mod. Phys. 47 (1975) 773; K. Wilson, Rev. Mod. Phys. 55 (1983) 583.
- [2] G. Boyd, J. Engels, F. Karsch, E. Laermann, C. Legeland, M.Lütgemeier und B. Petersson, Phys. Rev. Lett. 75 (1995) 4169.
- [3] B. Beinlich, F. Karsch und E. Laermann, Nucl. Phys. B462 (1996) 415; Diplomarbeit von B. Beinlich (1996).
- [4] A. Papa, Nucl. Phys. B478 (1996) 335.
- [5] J. Engels, R. Joswig, F. Karsch, E. Laermann, M. Lütgemeier und B. Petersson, Phys. Lett. B396 (1997) 210.
- [6] U. Heller und F. Karsch, Nucl. Phys. B258 (1985) 29.
- [7] Y. Luo, Phys. Rev. D57 (1998) 265.
- [8] T. Blum, C. DeTar, S. Gottlieb, U.M. Heller, J.E. Hetrick, K. Rummukainen, R.L. Sugar, D. Toussaint und M. Wingate Phys.Rev. D55 (1997) 1133.
- [9] H. J. Rothe, *Lattice gauge theories - an introduction*, World Scientific, Singapore, New Jersey, London, Hong Kong (1992).
- [10] I. Montvay, G. Münster, *Quantum fields on a lattice*, Cambridge University Press (1994).
- [11] J. Kogut und L. Susskind, Phys. Rev. D11 (1975) 395; T. Banks, J. Kogut und L. Susskind, Phys. Rev. D13 (1976) 1043; L. Susskind, Phys. Rev. D16 (1977) 3031.
- [12] H. Kluberg-Stern, A. Morel, O. Napoly und B. Petersson, Nucl. Phys. B220 (1983) 447.
- [13] C.A. Linhares und J.A. Mignaco, *SU(4) Properties of the Dirac-Kähler Equation*, CBPF-NF-008/91.

-
- [14] H.B. Nielsen und M. Ninomiya, Nucl. Phys. B185 (1981) 20; *erratum*: Nucl. Phys. B195 (1982) 541.
- [15] P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B414 (1994) 785; P. Hasenfratz, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 34 (1994) 3; F. Niedermayer, Nucl. Phys. B (Proc. Suppl.) 34 (1994) 513.
- [16] K. Symanzik, Nucl. Phys. B226 (1983) 187; K. Symanzik, Nucl. Phys. B226 (1983) 205.
- [17] M. Lüscher und P. Weisz, Comm. Math. Phys. 97 (1985)59; M. Lüscher und P. Weisz, Phys. Lett. B158 (1985) 250.
- [18] P. Weisz, Nucl. Phys. B212 (1983) 1; P. Weisz und R. Wohlert, Nucl. Phys. B236 (1984) 397.
- [19] K. Wilson in *Recent Developments in Gauge Theories*, Herausgeber G.'t Hooft *et al.* (Plenum Press, 1980).
- [20] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Phys. Lett. B365 (1996) 233;
- [21] F. Farchioni, P. Hasenfratz, F. Niedermayer und A. Papa, Nucl. Phys. B454 (1995) 638.
- [22] F. Farchioni und V. Laliena, Nucl. Phys. B (Proc Suppl.) 63A-C (1998) 907.
- [23] P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B507 (1997) 399.
- [24] T. DeGrand, A. Hasenfratz, P. Hasenfratz und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B454 (1995) 587.
- [25] M. Blatter und F. Niedermayer, Nucl. Phys. B482 (1996) 286;
- [26] Y. Iwasaki, Nucl. Phys. B258 (1985) 141; Y. Iwasaki, Univ. of Tsukuba report UTHEP-118 (1983) (unveröffentlicht).
- [27] Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Kaneko und T. Yoshie, Phys. Rev. D56 (1997) 151; Y. Iwasaki, K. Kanaya, T. Kaneko und T. Yoshie, Nucl. Phys. B53 (Proc. Suppl.) (1997) 429.
- [28] F. Karsch in: Advanced Series on Directions in High Energy Physics - Vol.6 (1990) 61, *Quark Gluon Plasma* (Edt. R.C. Hwa), Singapore 1990, World Scientific. World Scientific, Singapore.
- [29] B. Beinlich, F. Karsch, E. Laermann und A. Peikert, Nucl. Phys. B63 (Proc.Suppl.) (1998) 922.

-
- [30] S. Sharpe, Nucl. Phys. B34 (Proc. Suppl.) (1994) 403.
- [31] Y. Luo, Phys. Rev. D55 (1996) 353.
- [32] S. Naik, Nucl. Phys. B316 (1989) 238.
- [33] M.F.L. Goltermann, Nucl. Phys. B273 (1986) 663.
- [34] J.-F. Lagaë und D.K. Sinclair, Phys. Rev. D59 (1999) 014511.
- [35] J.I. Kapusta, Nucl. Phys. B148 (1979) 461;
O.K. Kalshnikov and V.V. Klimov, Phys. Lett. 88B (1979) 328.
- [36] P. Arnold und C. Zhai, Phys. Rev. D50 (1994) 7603.
- [37] H.S. Sharatchandra, H.J.Thun and P. Weisz, Nucl. Phys. B192 (1981) 205.