

## Quasimonotonie und Ungleichungen in halbgeordneten Räumen

LUDWIG ELSNER

*Institut für Angewandte Mathematik I der Universität Erlangen-Nürnberg  
852 Erlangen, Martensstraße 1, Germany*

Recommended by Lothar Collatz

### ABSTRACT

Let  $K$  be a cone in  $R^n$ ,  $K^*$  the polar cone. A  $n \times n$ -matrix  $A$  is called quasimonotone with respect to  $K$ , if

$$x \in \dot{K} \Leftrightarrow \exists \varphi \in K^*, \varphi \neq 0, (\varphi, x) = 0, (\varphi, Ax) \geq 0.$$

It is shown, that several properties are equivalent with this, especially the monotonicity of  $\exp(tA)$  for all  $t \geq 0$ . This was already shown by Schneider-Vidyasagar, here we give a new approach by considering the differential equation  $x'(t) = Ax(t)$ ,  $x(0) \in K$ . Two open questions in [5] are settled. We then consider irreducible quasimonotone matrices and show that most of the usual properties of irreducible monotone matrices hold also for this class. In the last section it is shown, that the connections between  $A$  quasimonotone and  $\exp(tA)$  monotone are special cases of differential inequalities for initial value problems in partially ordered topological vector spaces. The concept "quasimonotone," introduced here in a similar manner as by Volkmann, is not only sufficient, but proves also to be essentially necessary for inequalities of this type.

### 1. EINLEITUNG

Es sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix,  $K$  ein Kegel in  $X = R^n$ . Die Monotonie von  $\exp(tA)$ ,  $t \geq 0$  kann offenbar so gedeutet werden:

Die Lösung  $x(t)$  der Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = Ax(t)$$

$$x(0) = x_0$$

verläuft für  $x_0 \in K$  für  $t \geq 0$  ganz in  $K$ . Das ist sicher dann der Fall, wenn jede Lösungskurve den Kegelrand nur von außen nach innen durchqueren kann. Diese Bedingung kann formuliert werden als

$$u \in K - \{0\}, \quad \varphi \in K^* - \{0\}, \quad (\varphi, u) = 0 \Rightarrow (\varphi, Au) > 0.$$

Für die übliche komponentenweise Halbordnung wurde sie in [8] und für Kreiskegel in [2] untersucht. Für allgemeine Kegel wurden diese und ähnliche Bedingungen von Schneider und M. Vidyasagar in [5] betrachtet und deren Verbindung zur Monotonie von  $\exp(tA)$  aufgedeckt, ohne allerdings den Zusammenhang mit der Differentialgleichung zu erwähnen.

Die Diskussion dieses Zusammenhangs, der auch noch in weit allgemeinerem Rahmen besteht, ist ein Schwerpunkt dieser Arbeit. Aus diesem Grunde soll auch der zentrale Begriff „cross-positive“ in [5] hier mit „quasimonoton“ übersetzt werden, siehe [4], [9] und [12].

In der vorliegenden Arbeit werden, nach Vorbereitungen in Abschnitt 2, im dritten Abschnitt einige äquivalente Bedingungen für die Quasimonotonie angegeben, die teils neu, teils gegenüber [5] neu bewiesen sind. Außerdem werden zwei in [5] ausgesprochene Vermutungen bewiesen und Ergänzungen gebracht.

Im vierten Abschnitt werden die Eigenschaften irreduzibler quasimonotoner Matrizen untersucht.

Im letzten Abschnitt wird der Begriff der Quasimonotonie auch für Funktionen, die einen halbgeordneten topologischen Vektorraum  $X$  in sich abbilden, eingeführt. Die Definition ist etwas schwächer als die, die jüngst von Volkmann [12] gegeben wurde.

Für die Anfangswertaufgabe

$$d[u] = u' - f(t, u) = 0, \quad u(0) = u_0,$$

wo  $f(t, x)$  quasimonoton bezüglich  $x$  ist, werden Differentialungleichungen der Form

$$d[u] < d[v] \quad \text{in } (0, T], \quad u(0) < v(0),$$

$$\Rightarrow u(t) < v(t) \quad \text{in } [0, T]$$

hergeleitet, für  $X = R^n$  daraus die Existenz von Minimal- und Maximallösungen gefolgert und allgemein gezeigt, daß unter gewissen Zusatzvoraussetzungen aus Ungleichungen der obigen Form (mit  $\leq$  anstelle von  $<$ ) die Quasimonotonie von  $f$  folgt.

2. DEFINITIONEN UND HILFSMITTEL

Es sei  $X = R^n$  mit dem gewöhnlichen Skalarprodukt  $(\cdot, \cdot)$  und der euklidischen Norm  $\|\cdot\|$ .

Eine Menge  $K \subset X$  mit

$$(a) \quad \alpha K \subset K, \quad \alpha \geq 0, \quad (b) \quad K + K \subset K, \quad (c) \quad K = \bar{K},$$

$$(d) \quad K \cap \{-K\} = \{0\}, \quad (e) \quad \overset{\circ}{K} \neq \emptyset, \quad (1.1)$$

heißt Kegel. Dabei ist  $\bar{K}$  der Abschluß und  $\overset{\circ}{K}$  die Menge der inneren Punkte von  $K$ . Sei  $\dot{K} = K - \overset{\circ}{K}$  der Rand von  $K$  und  $\hat{K} = K - \{0\}$ . Die Menge

$$K^* = \{\varphi \in X, (\varphi, u) \geq 0 \text{ für alle } u \in K\}$$

hat ebenfalls die Eigenschaften 1(a)–1(e) und heißt daher der adjungierte Kegel. Es gilt

$$K = (K^*)^*$$

$$u \in \overset{\circ}{K} \Leftrightarrow (\varphi, u) > 0 \text{ für alle } \varphi \in \hat{K}^*$$

$$u \in \dot{K} \Leftrightarrow (\varphi, u) = 0 \text{ für ein } \varphi \in \hat{K}^*.$$

Die von  $K$  erzeugte Halbordnung wird mit  $\leq$  bezeichnet:

$$x \leq y \Leftrightarrow y - x \in K.$$

Ebenso benutzen wir die Bezeichnung  $x < y$  für  $y - x \in \overset{\circ}{K}$ . Sei  $A$  eine reelle  $n \times n$ -Matrix mit Spektrum  $\sigma(A)$ . Es sei  $\rho(A) = \max\{|\lambda|, \lambda \in \sigma(A)\}$  der Spektralradius und

$$\xi(A) = \{\max \operatorname{Re} \lambda, \lambda \in \sigma(A)\}.$$

$A$  heißt monoton bezüglich  $K$ , wenn  $A(K) \subset K$ , und strikt monoton, wenn  $A(\hat{K}) \subset \overset{\circ}{K}$ .

$A$  heißt quasimonoton bezüglich  $K$ , wenn gilt

$$x \in \dot{K} \Rightarrow \exists \varphi \in \hat{K}^*, \quad (\varphi, x) = 0, \quad (\varphi, Ax) \geq 0.$$

$A$  heißt streng quasimonoton bezüglich  $K$ , wenn gilt

$$x \in \dot{K} - \{0\} \Rightarrow \exists \varphi \in \hat{K}^*, \quad (\varphi, x) = 0, \quad (\varphi, Ax) > 0.$$

Aus [5] übernehmen wir die Bezeichnung  $\Pi(K)$  bzw.  $\Pi^+(K)$  für die Menge der monotonen bzw. strikt monotonen Matrizen. Ebenso seien  $\Sigma(K)$  bzw.  $\Sigma'(K)$  die Menge der quasimonotonen bzw. streng quasimonotonen Matrizen. Außerdem wird noch die Menge

$$\Pi_1(K) = \{A - \mu I, A \in \Pi(K), \mu \in R\}$$

( $I$  = Einheitsmatrix) benutzt.

### 3. QUASIMONOTONIE BEI MATRIZEN

Grundlegend ist

**SATZ 1.** Sei  $\alpha > 0$ . Für eine Matrix  $A$  sind folgende Bedingungen äquivalent:

- (1)  $A$  ist quasimonoton.
- (2)  $\exp(tA) \in \Pi(K)$  für alle  $t \geq 0$ .
- (3)  $x \in K, \varphi \in K^*, (\varphi, x) = 0 \Rightarrow (\varphi, Ax) \geq 0$ .
- (4)  $A \in \overline{\Pi_1(K)}$ .
- (5) Für  $\lambda > \xi(A)$  ist  $(\lambda I - A)^{-\alpha} \in \Pi(K)$ .

**BEMERKUNG.** In [5] wird  $A$  „cross-positive“ genannt, wenn Eigenschaft (3) gilt. Es wird dort die Äquivalenz von (2), (3) und (4) gezeigt.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Sei  $x_0 \in \overset{\circ}{K}, e \in \overset{\circ}{K}, \delta > 0$  und  $x(t)$  die Lösung der Anfangswertaufgabe

$$x'(t) = Ax(t) + \delta e, \quad x(0) = x_0.$$

Es gebe  $0 < t_0$  mit  $x(t_0) \in \overset{\circ}{K}, x(t) \in K$  für  $0 \leq t \leq t_0$ . Wegen (1) gibt es  $\varphi \in \overset{\circ}{K}^*$  mit  $(\varphi, x(t_0)) = 0, (\varphi, Ax(t_0)) \geq 0$ . Für  $h(t) = (\varphi, x(t))$  gilt also  $h(t) \geq 0$  in  $[0, t_0], h(t_0) = 0$ . Es folgt  $h'(t_0) \leq 0$ .

Andererseits ist  $h'(t_0) = (\varphi, x'(t_0)) = (\varphi, Ax(t_0) + \delta e) > 0$ . Es folgt, daß  $x(t) \in \overset{\circ}{K}$  für alle  $t \geq 0$  ist. Da  $x(t)$  für festes  $t$  stetig von  $x_0$  und  $\delta$  abhängt, erhält man daraus: Ist  $x'(t) = Ax(t), x(0) = x_0 \in K$ , so ist  $x(t) = \exp(tA)x_0$  in  $K$  für alle  $t \geq 0$ . Es ist also  $\exp(tA) \in \Pi(K)$  für  $t \geq 0$ .

(2)  $\Rightarrow$  (3): Sei  $x \in K, \varphi \in \overset{\circ}{K}^*, (\varphi, x) = 0$ . Ist  $x(t)$  die Lösung von  $x'(t) = Ax(t), x(0) = x$ , so ist nach (2)  $x(t) \in K$ , also ist für alle  $t \geq 0$ :  $h(t) = (\varphi, x(t)) \geq 0, h(0) = 0$ . Mithin ist  $h'(0) \geq 0$ . Es ist aber gerade  $h'(0) = (\varphi, x'(0)) = (\varphi, Ax)$ .

(3)  $\Rightarrow$  (4): Siehe [5].

(4)  $\Rightarrow$  (5): Sei  $A = B \dot{-} \mu I, B \in \Pi(K)$ . Aus  $\lambda > \xi(A)$  folgt  $\lambda + \mu > \xi(B) = \rho(B)$ . Daher konvergiert die Binomialreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{\nu} (-1)^\nu B^\nu (\lambda + \mu)^{-\nu}.$$

Weil alle Koeffizienten nichtnegativ sind, ist der Grenzwert

$$[I - (\lambda + \mu)^{-1}B]^{-\alpha} = (\lambda + \mu)^\alpha (\lambda I - A)^{-\alpha} \in \Pi(K).$$

Also ist  $(\lambda I - A)^{-\alpha} \in \Pi(K)$ . Aus Stetigkeitsgründen gilt dies auch für  $A \in \overline{\Pi_1(K)}$ .

(5)  $\Rightarrow$  (1): Es folgt durch Ersetzen von  $\lambda > 0, \lambda > \xi(A)$  durch  $t = \lambda^{-1}$ :  $(I - tA)^{-1} \in \Pi(K)$  für  $t \geq 0, 1 - t\xi(A) > 0$ . Sei  $x \in \dot{K}$ . Es gibt  $\varphi \in \dot{K}^*$  mit  $(\varphi, x) = 0$ . Sei  $h(t) = (\varphi, (I - tA)^{-\alpha}x)$ . Dann ist  $h(0) = 0, h(t) \geq 0$  für  $t \geq 0$ , also  $0 \leq h'(0) = \alpha(\varphi, Ax)$ . Q.E.D.

Mit einem ähnlichen Beweisansatz läßt sich die vierte Vermutung in [5] beweisen.

**SATZ 2.** Ist  $A$  streng quasimonoton, so ist  $\exp(tA) \in \Pi^+(K)$  für  $t > 0$ .

*Beweis.* Es gebe im Gegenteil  $x_0 \in \dot{K}, t_0 > 0$  und  $y = \exp(t_0A)x_0 \in \dot{K}$ . Da  $\exp(tA)$  nichtsingulär ist, ist  $y \neq 0$ . Es gibt daher  $\varphi \in \dot{K}^*$  mit  $(\varphi, y) = 0$  und  $(\varphi, Ay) > 0$ . Da für  $t \geq 0 \exp(tA)x_0 \in K$  ist, ist  $h(t) = (\varphi, \exp(tA)x_0) \geq 0$ , aber  $h(t_0) = 0$ , also  $h'(t_0) \leq 0$ . Das widerspricht  $h'(t_0) = (\varphi, Ay) > 0$ .

**BEMERKUNG.** Ist  $A \in \Sigma'$ , so hat also  $\exp(A)$  genau einen Eigenwert maximalen Betrages. Daher hat  $A$  genau einen Eigenwert mit Realteil  $\xi(A)$ . Damit ist auch die Vermutung 3 in [5] bewiesen.

#### 4. IRREDUZIBILITÄT UND QUASIMONOTONIE

Sei  $K$  ein Kegel in  $X = R^n$ . Zu  $y \in K$  sei  $L_y$  der von  $\{x: 0 \leq x \leq y\}$  aufgespannte lineare Teilraum. Es gilt

$$y = 0 \Leftrightarrow L_y = \{0\},$$

$$y \in \dot{K} \Leftrightarrow L_y = X.$$

Eine Matrix  $A$  heißt irreduzibel bezüglich  $K$ , wenn gilt

$$A(L_\nu) \subset L_\nu \Rightarrow L_\nu = \{0\} \quad \text{oder} \quad L_\nu = X.$$

Für monotonen  $A$  stimmt diese Definition mit der von Vandergraft in [7] eingeführten und auch in [5] benutzten überein. Es zeigt sich jedoch im folgenden, daß die Beschränkung auf monotonen  $A$  nicht nötig ist, sondern daß bereits die quasimonotonen irreduziblen Matrizen die üblichen Eigenschaften besitzen.

**SATZ 3.** *Sei  $A$  quasimonoton. Dann sind folgende Eigenschaften äquivalent:*

- (1)  $A$  ist irreduzibel bezüglich  $K$ .
- (2)  $\lambda > \xi(A) \Rightarrow (\lambda I - A)^{-1} \in \Pi^+(K)$ .
- (3)  $A$  besitzt keinen Eigenvektor in  $\dot{K}$ .
- (4)  $\exp(tA)$  ist irreduzibel für alle  $t > 0$  bis auf höchstens abzählbar viele Ausnahmepunkte.

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Nach Satz 1(5) ist für  $\lambda > \xi(A)$   $(\lambda I - A)^{-1} \in \Pi(K)$ . Ist (2) falsch, so gibt es  $\nu > \xi(A)$ ,  $u \in \dot{K}$  mit  $(\nu I - A)u = v$ ,  $v \in \dot{K}$ . Sei  $\mu > \nu$ . Dann ist  $w = (\mu I - A)u = (\mu - \nu)u + v$ , also  $w \in K$ . Sei  $\varphi \in \dot{K}^*$ ,  $(\varphi, u) = 0$ , so folgt  $0 \leq (\varphi, v) = \nu(\varphi, u) - (\varphi, Au) \leq 0$ , daher ist  $(\varphi, v) = 0$  und  $(\varphi, w) = 0$ , also  $w \in \dot{K}$ . Ist nun  $0 \leq z \leq w$ , so ist  $0 \leq (\mu I - A)^{-1}z \leq (\mu I - A)^{-1}w = u = (\mu - \nu)^{-1}(w - v) \leq (\mu - \nu)^{-1}w$ , d. h.  $(\mu I - A)^{-1}(L_w) \subset L_w$ . Da diese Abbildung bijektiv ist, folgt  $A(L_w) \subset L_w$ .  $A$  ist also nicht irreduzibel.

(2)  $\Rightarrow$  (3): trivial.

(3)  $\Rightarrow$  (1): Sei  $t > 0$  so gewählt, daß für  $\lambda_1, \lambda_2 \in \sigma(A)$ ,  $\lambda_1 \neq \lambda_2$  auch  $\exp(t\lambda_1) \neq \exp(t\lambda_2)$  ist. Dann ist jeder Eigenvektor von  $\exp(tA)$  auch Eigenvektor von  $A$ .

Ist (1) falsch, so gibt es  $L_\nu \neq \{0\}$ ,  $\neq X$  mit  $A(L_\nu) \subset L_\nu$ . Daher gilt  $\exp(tA)(L_\nu \cap K) \subset L_\nu \cap K$ . Also existiert in  $L_\nu \cap K \subset \dot{K}$  ein Eigenvektor von  $\exp(tA)$  und damit von  $A$ . Q.E.D.

Die Äquivalenz von (3) und (4) ist in [5, Lemma 8] bewiesen worden und hier nur der Vollständigkeit halber angeführt. Für den Beweis von Satz 4 benötigen wir

**LEMMA 1.** *Sei  $A \in \Sigma(K)$ . Dann ist  $A$  irreduzibel bezüglich  $K$  genau dann, wenn  $A^*$  irreduzibel bezüglich  $K^*$  ist.*

*Beweis.* Satz 1(3) zeigt, daß  $A^* \in \Sigma(K^*)$  ist. Es genügt daher zu zeigen: Ist  $A \in \Sigma(K)$ ,  $A$  irreduzibel bezüglich  $K$ , so ist  $A^*$  irreduzibel bezüglich  $K^*$ .

Sei  $A^*$  nicht irreduzibel bezüglich  $K^*$ . Nach Satz 3(3) existiert  $l \in \dot{K}^*$ ,  $l \neq 0$ ,  $A^*l = \mu l$ . Sei  $x \in \dot{K}$ ,  $(l, x) = 0$ . Dann ist für  $\lambda > \xi(A) \geq \mu$

$$0 = ((\lambda - \mu)^{-1}l, x) = ((\lambda I - A^*)^{-1}l, x) = (l, (\lambda I - A)^{-1}x).$$

Das widerspricht  $(\lambda I - A)^{-1} \in \Pi^+(K)$ . Q.E.D.

Satz 4 zeigt, daß die üblichen Eigenschaften des Spektrums irreduzibler monotoner Matrizen [7, 8] bereits bei quasimonotonen irreduziblen Matrizen vorliegen.

SATZ 4. Sei  $A \in \Sigma(K)$  irreduzibel. Dann gilt

- (1)  $\xi(A)$  ist einfacher Eigenwert von  $A$ .
- (2) Der einzige Eigenvektor zu  $\xi(A)$  liegt in  $\dot{K}$ .
- (3)  $A$  hat keinen anderen Eigenvektor in  $K$ .

*Beweis.* Satz 1(2) zeigt, daß  $\xi(A)$  Eigenwert von  $A$  ist und ein Eigenvektor  $z$  zu  $\xi(A)$  in  $K$  liegt. Satz 3(3) zeigt  $z \in \dot{K}$ . Daher hat der Nullraum von  $A - \xi(A)I$  die Dimension eins. Dieselben Überlegungen ergeben unter Berücksichtigung von Lemma 1 die Existenz von  $\varphi \in \dot{K}^*$ ,  $A^*\varphi = \xi(A)\varphi$ . Insbesondere ist  $(\varphi, z) > 0$ . Daher hat die Gleichung  $Ax = \xi(A)x + z$  keine Lösung, es gibt keine Hauptvektoren zweiter Stufe,  $\xi(A)$  ist einfach. Da  $(\varphi, x) = 0$  für alle Eigenvektoren  $x$  zu Eigenwerten  $\neq \xi(A)$  ist und da  $(\varphi, x) > 0$  für alle  $x \in \dot{K}$  ist, kann es keine weiteren Eigenvektoren in  $K$  geben.

BEMERKUNG. Mit Hilfe von

LEMMA 2.  $A \in \Sigma'(K) \Rightarrow A$  ist irreduzibel bezüglich  $K$

impliziert Satz 4 sofort Satz 7 in [5].

*Beweis von Lemma 2.* Andernfalls gibt es  $x \in \dot{K}$ ,  $x \neq 0$  mit  $A(L_x) \subset L_x$ . Ist  $\varphi \in K^*$ ,  $(\varphi, x) = 0$ , so ist für  $0 \leq v \leq x$   $0 \leq (\varphi, v) \leq (\varphi, x) = 0$ , also

$(\varphi, v) = 0$ . Damit ist  $(\varphi, w) = 0$  für alle  $w \in L_x$ . Es folgt insbesondere  $(\varphi, Ax) = 0$ , ein Widerspruch zu  $A \in \Sigma'(K)$ .

**BEMERKUNG.** Lemma 2 ist sicher nicht umkehrbar. Es gibt nämlich quasimonotone irreduzible Matrizen (Beispiel 2 in [5]), die mehrere Eigenwerte mit Realteil  $\xi(A)$  besitzen. Die auf Satz 2 folgende Bemerkung zeigt, daß diese nicht in  $\Sigma'(K)$  liegen. Selbst die Bedingung „ $A \in \Sigma(K)$ , irreduzibel,  $\operatorname{Re} \lambda < \xi(A)$  für  $\lambda \in \sigma(A)$ ,  $\lambda \neq \xi(A)$ “ impliziert nicht  $A \in \Sigma'(K)$ , wie Gegenbeispiele zeigen.

Nach Satz 2 ist  $\exp(tA)$  strikt monoton für  $t > 0$ , wenn  $A$  in  $\Sigma'(K)$  liegt. Diese Voraussetzung ist sicher zu stark. Erwünscht ist eine Charakterisierung aller dieser Matrizen. Satz 5 ist als ein Schritt zu diesem Ziel anzusehen.

**SATZ 5.** Sei  $A \in \Sigma(K)$ . Dann sind äquivalent:

- (1) Es gibt  $t > 0$  mit  $\exp(tA) \in \Pi^+(K)$ .
- (2)  $A$  ist irreduzibel bezüglich  $K$ .  $\xi(A)$  ist der einzige Eigenwert von  $A$  mit Realteil  $\xi(A)$ .

*Beweis.* (1)  $\Rightarrow$  (2): Da  $\exp(tA)$  keinen Eigenvektor in  $\mathring{K}$  besitzt, gilt dies auch für  $A$ , nach Satz 3(3) ist  $A$  irreduzibel. Da  $\exp(tA)$  genau einen einfachen Eigenwert maximalen Betrages besitzt, hat  $A$  nur einen Eigenwert mit maximalem Realteil.

(2)  $\Rightarrow$  (1): Ohne Einschränkung sei  $\xi(A) = 0$ . Ist  $z \in \mathring{K}$  der zu 0 gehörige Eigenvektor von  $A$  und  $\varphi \in \mathring{K}^*$  der entsprechende Eigenvektor von  $A^*$ , so können wir  $(\varphi, z) = 1$  annehmen.  $A$  bildet den Teilraum  $L = (I - z\varphi)X$  in sich ab und besitzt dort nur Eigenwerte mit negativem Realteil, der Spektralradius von  $\exp(A)$  ist also kleiner als eins. Es gibt daher eine Vektornorm  $\nu$  auf  $L$  und eine Zahl  $q$ ,  $0 < q < 1$  mit

$$\nu[\exp(A)(I - z\varphi)u] \leq q\nu[(I - z\varphi)u], \quad u \in X$$

[3, S. 46].  $\nu$  kann auf ganz  $X$  fortgesetzt werden. Da  $z \in \mathring{K}$ , gibt es  $\varepsilon > 0$  mit  $\{v: \nu(z - v) \leq \varepsilon\} \subset \mathring{K}$ . Wegen  $\varphi \in \mathring{K}^*$  ist  $H = \{x \in K, (\varphi, x) = 1\}$  beschränkt, etwa  $\nu(u) \leq M$  für  $u \in H$ . Ist  $k$  so gewählt, daß  $2q^k M \leq \varepsilon$  ist, so ist für  $u \in H$

$$\begin{aligned} \nu[\exp(kA)u - z] &= \nu[\exp(kA)u - \exp(kA)z(\varphi, u)] \\ &= \nu[\exp(kA)(I - z\varphi)u] \leq q^k \nu[(I - z\varphi)u] \end{aligned}$$

$$= q^k v(u - z) \leq 2Mq^k \leq \varepsilon.$$

Es ist also  $\exp(kA)u \in \overset{\circ}{K}$  für  $u \in H$  und damit für alle  $u \in K$ . Q.E.D.

**BEMERKUNG.** Ist  $\Pi_1(K)$  abgeschlossen, so zieht (siehe [5, Prop. 1]) die Bedingung (2)  $\exp(tA) \in \Pi^+(K)$  bereits für alle  $t > 0$  nach sich. Das folgende Korollar zeigt, daß diese Implikation auch für den Lorentzkegel gilt, bei dem  $\Pi_1(K)$  nicht abgeschlossen ist. Dagegen hat W. Walter ein Beispiel eines Kegels  $K$  und einer Matrix  $A$  im  $R^3$  angegeben (private Mitteilung), wo Bedingung (2) vorliegt, aber  $\exp(tA)$  erst für großes  $t$  in  $\Pi^+(K)$  ist.

**KOROLLAR.** Sei  $K$  der Lorentzkegel

$$\left\{ x = (x_1, \dots, x_n) : x_1 \geq 0, x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 \geq 0 \right\},$$

$A \in \Sigma(K)$  erfülle die Bedingung (2) von Satz 5. Dann ist  $\exp(tA) \in \Pi^+(K)$  für alle  $t > 0$ .

*Beweis.* Es gilt offenbar

$$x \in \overset{\circ}{K} \Leftrightarrow x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 > 0, \quad x_1 > 0.$$

Ist die Behauptung falsch, so gibt es  $t_0 > 0$  und  $x_0 \in \overset{\circ}{K}$  mit  $\exp(t_0 A)x_0 \in \overset{\circ}{K}$ . Da  $\exp(tA)\overset{\circ}{K} \subset \overset{\circ}{K}$  für alle  $t \geq 0$ , verläuft die Kurve  $x(t) = \exp(tA)x_0$ ,  $0 \leq t \leq t_0$  ganz in  $\overset{\circ}{K}$ . In  $x(t) = [x_1(t), \dots, x_n(t)]$  sind die  $x_i(t)$  überall konvergente Potenzreihen in  $t$ , daher ist  $x_1(t)^2 - \sum x_i(t)^2$  eine Potenzreihe, die für  $0 \leq t \leq t_0$  verschwindet. Sie verschwindet also für alle  $t$ . Das widerspricht Satz 5, wonach für große  $t$   $x(t) \in \overset{\circ}{K}$  ist. Q.E.D.

### 5. QUASIMONOTONIE UND DIFFERENTIALUNGLEICHUNGEN IN HALBGEORDNETEN TOPOLOGISCHEN VEKTORRÄUMEN

Im folgenden wird gezeigt, daß das Hauptergebnis von Abschnitt (3), der Zusammenhang der Quasimonotonie von  $A$  und der Monotonie von  $\exp(tA)$ , als Spezialfall allgemeiner Sätze über Differentialungleichungen bei quasimonotonen Differentialgleichungen in halbgeordneten Vektorräumen erscheint.

Sei  $X$  ein topologischer Vektorraum, halbgeordnet durch einen Kegel  $K$ , d. h. eine Menge  $K \subset X$ , die die Axiome (1.1) erfüllt.

Sei  $X^*$  der Banachraum der stetigen linearen Funktionale auf  $X$  und  $K^* = \{\varphi \in X^*, (\varphi, x) \geq 0 \text{ für alle } x \in K\}$ .

DEFINITION. Eine Funktion  $g: G \subset X \rightarrow X$  heißt quasimonoton bezüglich  $K$ , wenn gilt

$$\begin{aligned} x, y \in G, y - x \in \overset{\circ}{K} &\Rightarrow \exists \varphi \in \overset{\circ}{K}^* \text{ mit } (\varphi, y - x) = 0, \\ &(\varphi, g(y) - g(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

DEFINITION. Sei  $T > 0, G \subset [0, T] \times X, f: G \rightarrow X$  heißt quasimonoton, wenn  $f(t, x)$  bezüglich  $x$  für jedes  $t \in [0, T]$  quasimonoton ist.

Für  $X = \mathbb{R}^n, f(t, x) = Ax$  stimmt diese Definition mit der in Abschnitt 2 gegebenen überein. Sie stellt eine Abschwächung der in [12] gegebenen Definition von „quasimonoton“ dar, wo gefordert wird

$$\begin{aligned} x, y \in G, y - x \in K, \varphi \in \overset{\circ}{K}^*, (\varphi, y - x) = 0 \\ \Rightarrow (\varphi, g(y) - g(x)) \geq 0. \end{aligned}$$

Es sei nun  $f: G \subset [0, T] \times X \rightarrow X$  und

$$d[v](t) = v'(t) - f[t, v(t)].$$

Dabei wird im folgenden stets stillschweigend vorausgesetzt, daß die rechte Seite sinnvoll ist, d. h. daß  $v(t)$  bei  $t$  differenzierbar ist und  $[t, v(t)] \in G$  ist. Der folgende Satz wird in [12] mit der dort benutzten „Quasimonotonie“ bewiesen, gilt jedoch auch in unserem Falle. Der Vollständigkeit halber sei der kurze Beweis hier angeführt.

SATZ 6. Sei  $f$  quasimonoton,  $u(t), v(t): [0, T] \rightarrow X$ . Dann gilt

$$\left. \begin{aligned} u(0) < v(0) \\ d[u](t) < d[v](t) \text{ in } (0, T] \end{aligned} \right\} \Rightarrow u(t) < v(t) \text{ in } [0, T].$$

Beweis. Andernfalls gibt es  $t_0 > 0$  mit  $v(t_0) - u(t_0) \in \overset{\circ}{K}, v(t) - u(t) \in \overset{\circ}{K}$  in  $[0, t_0)$ . Da  $f$  quasimonoton ist, gibt es  $\varphi \in \overset{\circ}{K}^*$  mit  $(\varphi, v(t_0) - u(t_0)) = 0$ ,

$$(\varphi, f[t_0, v(t_0)] - f[t_0, u(t_0)]) \geq 0.$$

$h(t) = (\varphi, v(t) - u(t))$  ist positiv in  $[0, t_0)$ ,  $h(t_0) = 0$ . Daher

$$0 \geq h'(t_0) = (\varphi, v'(t_0) - u'(t_0)) > (\varphi, f[t_0, v(t_0)] - f[t_0, u(t_0)]) \geq 0. \quad \text{Q.E.D.}$$

Aus Satz 6 kann man im Falle  $X = R^n$ , indem man dem üblichen Vorgehen bei der komponentenweisen Halbordnung folgt [9, S. 67], [4, S. 25ff.], die Existenz von Minimal- und Maximallösungen herleiten.

SATZ 7 (ohne Beweis). Sei  $X = R^n$ ,  $e \in K$ ,  $f$  quasimonoton und stetig. Dann gibt es eine Minimallösung  $u^*(t)$  und eine Maximallösung  $v^*(t)$  der Aufgabe

$$d[w](t) = 0, \quad 0 < t \leq T, \quad w(0) = \eta, \quad (5.1)$$

d. h.  $u^*$ ,  $v^*$  lösen (5.1) und jede Lösung der Aufgabe (5.1) erfüllt  $u^*(t) \leq w(t) \leq v^*(t)$  im gemeinsamen Existenzbereich.  $u^*(t)$  bzw.  $v^*(t)$  kann durch Lösungen von

$$d[u] = -\delta e, \quad u(0) = \eta - \delta e,$$

bzw.

$$d[v] = \delta e, \quad v(0) = \eta + \delta e,$$

mit  $\delta > 0$  gleichmäßig approximiert werden.

Es seien  $u^*(t)$  und  $v^*(t)$  auf  $[0, T]$  definiert. Dann gilt weiterhin

$$d[w](t) \geq 0 \quad \text{in} \quad (0, T], \quad w(0) \geq \eta \Rightarrow w(t) \geq u^*(t) \quad \text{in} \quad [0, T],$$

$$d[w](t) \leq 0 \quad \text{in} \quad (0, T], \quad w(0) \leq \eta \Rightarrow w(t) \leq v^*(t) \quad \text{in} \quad [0, T].$$

Ist zudem die Aufgabe

$$d[u](t) = g(t), \quad u(0) = u_0$$

für jedes stetige  $g(t)$  und jedes  $u_0$  eindeutig lösbar, so gilt

$$d[u] \leq d[v] \quad \text{in} \quad (0, T], \quad u(0) \leq v(0) \Rightarrow u(t) \leq v(t) \quad \text{in} \quad [0, T]. \quad (5.2)$$

BEMERKUNG. Neben dem klassischen Fall  $K = K_0 = \{x = (x_1, \dots, x_n), x_i \geq 0\}$  sind in Satz 7 auch die Ergebnisse von Burton-Whyburn [1] (siehe auch [4, S. 21ff.]) enthalten. Sie entsprechen dem Kegel  $K_I = \{x, x_i \leq 0 \text{ für } i \in I, x_i \geq 0 \text{ für } i \notin I\}$ . Dabei ist  $I \subset \{1, \dots, n\}$ .

Für  $f(t, x) = Ax$  entspricht (5.2) gerade der Monotonie von  $\exp(tA)$ ,  $t \geq 0$ . Satz 7 entspricht also der Implikation (1)  $\rightarrow$  (2) in Satz 1.

Unter welchen Zusatzvoraussetzungen (5.2) auch in allgemeineren Räumen gilt, ist in [12, Satz 2] untersucht worden. Es soll hier nur noch gezeigt werden, daß für (5.2) die Quasimonotonie notwendig ist. Das entspricht in Satz 1 der Implikation (2)  $\rightarrow$  (1). Beim Beweis von Satz 8 werden Ideen von Szarski [6], der ein ähnliches Ergebnis für  $X = R^n$ ,  $K = K_0$  bewies, verwendet.

**SATZ 8.** Sei  $f: G \subset [0, T] \times X \rightarrow X$ . Für  $0 \leq \tau < T$ ,  $(\tau, x) \in G$  besitze die Anfangswertaufgabe  $d[w] = 0$ ,  $w(\tau) = x$  eine Lösung in einer Rechts-umgebung von  $\tau$ .

Für jedes  $0 \leq \tau < T$  und  $\varepsilon > 0$  mit  $\tau + \varepsilon \leq T$  gelte

$$\left. \begin{array}{l} d[u] = d[v] = 0 \quad \text{in} \quad [\tau, \tau + \varepsilon] \\ u(\tau) \leq v(\tau) \end{array} \right\} \Rightarrow u(t) \leq v(t) \quad \text{in} \quad [\tau, \tau + \varepsilon].$$

Dann ist  $f$  quasimonoton in  $[0, T)$ .

*Beweis.* Es wird die stärkere Aussage

$$\begin{aligned} \tau \in [0, T), \quad (\tau, x) \in G, \quad (\tau, y) \in G, \quad y - x \in \dot{K}, \quad \varphi \in K^*, \\ (\varphi, y - x) = 0 \Rightarrow (\varphi, f(\tau, y) - f(\tau, x)) \geq 0 \end{aligned}$$

hergeleitet.

Für die Lösungen  $u(t)$ ,  $v(t)$  der Aufgaben  $u(\tau) = x$ ,  $d[u] = 0$ ,  $v(\tau) = y$ ,  $d[v] = 0$ , die etwa in  $[\tau, \tau + \varepsilon]$  existieren, gilt nach Voraussetzung  $u(t) \leq v(t)$  in  $[\tau, \tau + \varepsilon]$ . Mit  $h(t) = (\varphi, v(t) - u(t))$  ist  $h(\tau) = 0$ ,  $h(t) \geq 0$  in  $[\tau, \tau + \varepsilon]$ , also

$$\begin{aligned} 0 \leq h'(\tau) &= (\varphi, v'(\tau) - u'(\tau)) = (\varphi, f[\tau, v(\tau)] - f[\tau, u(\tau)]) \\ &= (\varphi, f(\tau, y) - f(\tau, x)). \end{aligned} \quad \text{Q.E.D.}$$

**BEISPIEL.** Im Fall  $X = R^2$ ,  $K = K_\alpha = \{x = (x_1, x_2), |x_2| \leq \alpha x_1\}$  errechnet man leicht, daß  $f(t, x) = [f_1(t, x), f_2(t, x)]$  genau dann quasimonoton ist, wenn

$$f_1(t, x) - f_1(t, y) \geq |f_2(t, x) - f_2(t, y)|$$

für  $t \geq 0$  und  $x_1 - y_1 = \alpha|x_2 - y_2|$  ist. So ist das System

$$y_1' = a_1(t)y_1 + a_2(t)y_2 + a_3(t),$$

$$y_2' = b_1(t)y_1 + b_2(t)y_2 + b_3(t)$$

genau dann quasimonoton, wenn

$$a_1(t) \geq |b_1(t) \pm \alpha^{-1}b_2(t)| + \alpha^{-1}|a_2(t)|$$

für  $t \geq 0$  ist.

#### LITERATUR

- 1 L. P. Burton und W. M. Whyburn, Minimax solutions of ordinary differential systems. *Proc. Amer. Math. Soc.* **3**(1952), 794-803.
- 2 L. Elsner und K. P. Hadeler, Eigenwerteinschließung mit Lorentzkegeln. *ZAMM* **50**(1970), 427-429.
- 3 A. S. Householder, *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*, New York (1964).
- 4 V. Lakshmikantham und S. Leela, *Differential and Integral Inequalities I*, New York (1969).
- 5 H. Schneider und M. Vidyasagar, Cross-positive matrices. *SIAM J. Num. Anal.* **7**(1970), 508-519.
- 6 J. Szarski, *Differential Inequalities*, Warszawa, 1967.
- 7 J. S. Vandergraft, Spectral properties of matrices which have invariant cones. *SIAM J. Appl. Math.* **16**(1968), 1208-1222.
- 8 R. S. Varga, *Matrix Iterative Analysis*, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1962.
- 9 W. Walter, *Differential and Integral Inequalities*, Springer Verlag, New York (1970).
- 10 W. Walter, Ordinary differential inequalities in ordered Banach spaces. *J. Diff. Eq.* **9**(1971), 253-261.
- 11 W. Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen im Banachraum. *Arch. d. Math.* **XX**(1969), 36-47.
- 12 P. Volkmann, Gewöhnliche Differentialungleichungen mit quasimonoton wachsenden Funktionen in topologischen Vektorräumen. *Math. Zeitschr.* **127**(1972), 157-164.

Received December, 1972