EINSCHLIESSUNGSSÄTZE FÜR EIGENWERTE NICHTNORMALER MATRIZEN

von Ludwig Elsner in Hamburg

Gegeben sei eine quadratische Matrix A, ein Vektor $x \neq o$ und sein Bild Ax. Lassen sich daraus Aussagen über das Spektrum von A gewinnen? Im Falle *normaler* Matrizen kann man daraus mit Hilfe des *Quotientensatzes* oder des *Satzes von Krylow-Bogoljubow* Einschließungskreise für mindestens einen Eigenwert von A konstruieren [1]. Es lassen sich jedoch auch für allgemeine Matrizen Einschließungen dieser Art angeben, wenn man nur ihre *"Abweichung von der Normalität"* kennt. Außerdem lassen sich daraus Aussagen über das Verhalten der Näherungen für den Fall herleiten, daß x gegen einen Eigenvektor strebt. Diese Ergebnisse lassen sich auch auf die *Spektralvariation* zweier Matrizen übertragen.

1. BEZEICHNUNGEN, DEFINITIONEN, HILFSMITTEL

a) Sei ν eine Vektornorm. Dann bezeichnen wir mit demselben Symbol auch die zugeordnete Matrix-Norm. Spezielle Normen sind $\|x\|_1 = \max_i |x_i|$ und die euklidische Norm $\|x\| = \left[\sum_i |x_i|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ mit den *zugeordneten Matrixnormen* $\|A\|_1 = \max_i \sum_k |a_{ik}|$ (Zeilensummennorm) und $\|A\| = \sigma(A) = \max \sqrt{\sigma_i}$ (Spektralnorm), wobei die σ_i die Eigenwerte von $A\bar{A}'$ sind.

Sei T eine nichtsinguläre Matrix, ν eine Norm. Dann ist auch $\nu_T(x) = \nu(Tx)$ eine Norm. Die zugeordnete Matrixnorm ist $\nu_T(A) = \nu(TAT^{-1})$.

b) Jede $n \times n$-Matrix ist unitär auf obere Dreiecksgestalt transformierbar:

$$A = U(D+M)\bar{U}', \quad D = (d_{ik}) = (\lambda_i \delta_{ik}), \quad U\bar{U}' = E$$

(1)

$$M = (m_{ik}) \qquad m_{ik} = o \quad \text{für} \quad i \geq k.$$

Siehe etwa [2]. Offenbar sind die λ_i gerade die Eigenwerte von A.

HENRICI [3] definiert nun für eine beliebige Norm ν die *"Abweichung von der Normalität bezüglich* ν*"* als

(2) $$\Delta_\nu(A) = \min \nu(M)$$

wobei das Minimum über alle nach (1) erhaltenen M zu erstrecken ist. Daß es angenommen wird, kann man leicht mit den üblichen Methoden nachweisen.

Die Berechtigung der obigen Bezeichnung ergibt sich aus der Tatsache, daß $\Delta_\nu(A)$ genau für normale A verschwindet.

$\Delta_\nu(A)$ kann für $\nu = \epsilon(A) = \left[\sum_{i,k} |a_{ik}|^2\right]^{\frac{1}{2}}$ nach [3] abgeschätzt werden:

(3) $$\Delta_\epsilon(A) \leq \left(\frac{n^3 - n}{12}\right)^{\frac{1}{4}} [\epsilon(A\bar{A}' - \bar{A}'A)]^{\frac{1}{2}}$$

c) Es sei $Ax = Bx$, $x \neq o$, A nichtsingulär, ν eine Norm. Dann folgt

$$x = A^{-1}Bx, \quad \nu(x) \leq \nu(A^{-1})\, \nu(Bx)$$

oder

$$[\nu(A^{-1})]^{-1} \leq \frac{\nu(Bx)}{\nu(x)} \leq \nu(B)$$

Sei m kein Eigenwert von A. Dann ersetzen wir A durch $A - mE$ und B durch $B - mE$ und erhalten die fundamentale Ungleichung

(4) $$[\nu((A - mE)^{-1})]^{-1} \leq \frac{\nu(Ax - mx)}{\nu(x)} \leq \nu(B - mE)$$

2. EINSCHLIESSUNGSSÄTZE FÜR EIGENWERTE NORMALER MATRIZEN

Ist A *normal*, so gilt bekanntlich $\sigma(A) = \max_i |\lambda_i|$. Mit A ist auch $(A - mE)^{-1}$ normal. Die erste Ungleichung von (4) ergibt daher für $\nu = \| \ \|$

$$\min |\lambda_i - m| \leq \frac{\| Ax - mx \|}{\| x \|}$$

Wählt man nun m so, daß die rechte Seite minimal wird, so erhält man

$$m = m_1 := \frac{(Ax, x)}{(x,x)}, \quad \frac{\| Ax - mx \|}{\| x \|} = r_1 := \left[\frac{(Ax, Ax)}{(x,x)} - |m_1|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

Das ergibt den *Satz von Krylow-Bogoljubow:*

SATZ 1: *Sind λ_i die Eigenwerte der normalen Matrix A und ist $x \neq o$, so gilt*

$$\min \left|\lambda_i - \frac{(Ax, x)}{(x,x)}\right| \leq \left[\frac{(Ax, Ax)}{(x,x)} - \left| \frac{(Ax, x)}{(x,x)} \right|^2 \right]^{\frac{1}{2}} \tag{5}$$

Es sei nun $x_i \neq o$ für alle i. Dann wähle man $B = Q$ mit $q_{ik} = q_i \delta_{ik}$ und $q_i = (Ax)_i / x_i$. Offenbar ist $Ax = Qx$. Die zweite Ungleichung von (4) ergibt nun für $\nu = \sigma$, wenn man noch $\sigma(Q - mE) = \max_i |q_i - m| =: r_2$ beachtet, den *Quotientensatz:*

SATZ 2: *Sei A normal mit Eigenwerten λ_i, $x_i \neq o$ für alle i, $q_i = (Ax)_i / x_i$. Dann gilt*

$$\min |\lambda_i - m| \leq \max |q_i - m| \tag{6}$$

Ein Kreis, der alle Quotienten umfasst, enthält mindestens einen Eigenwert.

Es ist offenbar $r_1 \leq r_2$. Daher liefert Satz 1 stets bessere Einschließungen als Satz 2. Dafür ist dieser gewisser Erweiterungen fähig. Es genügt hier nämlich vorauszusetzen, daß DAD^{-1} normal ist für eine nichtsinguläre Diagonalmatrix D. Dann gilt bereits die Aussage (6) des Quotientensatzes. Zum Beweise benutze man in (4) die Norm $\nu(x) = \| Dx \|$.

3. NICHTNORMALE MATRIZEN

SATZ 3: *Sei* $\Delta = \Delta_\sigma(A)$, $x \neq o$, m *eine Zahl mit* $\|Ax - mx\| \leq r\,\|x\|$. *Dann ist*

$$\min |\lambda_i - m| \leq r + \Delta \tag{7}$$

Beweis: Für die euklidische Norm $\|\ \|$ und unitäre Matrizen U gilt bekanntlich $\|Ux\| = \|x\|$, ebenso $\sigma(UA) = \sigma(A)$. Man wählt nun U speziell so, daß $UA\bar{U}' = D + M$ mit $\Delta = \sigma(M)$ ist (1b).

$$\|Ax - mx\| = \|U(A - mE)\,\bar{U}'Ux\| = \|(D - mE + M)Ux\| \geq \|(D - mE)Ux\| - \|MUx\|.$$

Wäre nun für alle i $|\lambda_i - m| > r + \Delta$, so würde weiter folgen:

$$> (r + \Delta)\,\|Ux\| - \sigma(M)\,\|Ux\| = r\,\|x\|.$$

Das ist ein Widerspruch zur Voraussetzung. (Siehe auch [4] S. 9-10)

Setzt man $m = m_1$, $r = r_1$, so ergibt Satz 3 eine Erweiterung von Satz 1. Im Falle $x_i \neq o$ für alle i und $r = r_2$ stellt er eine Verallgemeinerung von Satz 2 dar. Ein Nachteil ist es, daß für x = Eigenvektor, m = Eigenwert, $r = o$ nicht die exakte Schranke o herauskommt. Für kleine r ist daher die Abschätzung (7) sicher zu grob. Der nächste Satz ist hier genauer. Zunächst noch eine Definition (s. [3]).

Die Funktion $f_n(x) = x + x^2 + \ldots + x^n$ bildet die nichtnegativen Zahlen monoton auf sich ab. Daher existiert dort die (ebenfalls monotone) Umkehrfunktion, die wir mit g_n bezeichnen.

$$x \geq o, \quad y \geq o : f_n(x) = y \Longleftrightarrow g_n(y) = x$$

Da im weiteren n zunächst fest ist, schreiben wir auch $f(x)$ bzw. $g(y)$.

SATZ 4:[1] *Sei* $\Delta = \Delta_\sigma(A)$. *Falls* m *kein Eigenwert von* A *ist, gelte ausserdem* $\{\sigma[(A - mE)^{-1}]\}^{-1} \leq r$. *Dann ist*

$$\min |\lambda_i - m| \leq \frac{\Delta}{g(y)} \qquad y = \frac{\Delta}{r}. \tag{8}$$

Beweis: Sei m kein Eigenwert und U wie im Beweis zu Satz 3 gewählt. Es ist

$$U(A - mE)^{-1}\bar{U}' = (D + M - mE)^{-1} = (D - mE)^{-1}(E + M(D - mE)^{-1})^{-1} =$$

$$= (D - mE)^{-1}(E - M(D - mE)^{-1} + \ldots + [M(D - mE)^{-1}]^{n-1}).$$

Sämtliche höheren Potenzen von $M(D - mE)^{-1}$ verschwinden. Es sei $\rho = \sigma((D - mE)^{-1})$.

Wegen $\Delta = \sigma(M)$ folgt nun

$$\sigma((A - mE)^{-1}) \leq \rho(1 + \rho\Delta + \ldots + (\rho\Delta)^{n-1}).$$

Also ist

$$y = \frac{\Delta}{r} \leq f(\Delta\rho)\,. \quad \text{Daher} \quad \min|\lambda_i - m| = \frac{1}{\rho} \leq \frac{\Delta}{g(y)}\,.$$

Damit ist der Satz für den Fall bewiesen, daß m kein Eigenwert ist. Im anderen Fall ist jedoch die Aussage trivial.

Beachtet man (4), so erhält man die beiden folgenden Corollare.

COROLLAR 1: *Sei m_1, r_1 wie in Satz 1 definiert. Dann ist*

$$\min|\lambda_i - m_1| \leq \frac{\Delta}{g(y)} \qquad y = \frac{\Delta}{r_1}\,.$$

COROLLAR 2: *Sei $r_2 = \max|q_i - m|$. Dann gilt*

$$\min|\lambda_i - m| \leq \frac{\Delta}{g(y)} \qquad y = \frac{\Delta}{r_2}\,.$$

4. VERGLEICH DER ABSCHÄTZUNGEN

Wir definieren für $\Delta > o$, $r > o$, $n \in N$: $s_n(r, \Delta) = \dfrac{\Delta}{g_n(y)}$ mit $y = \dfrac{\Delta}{r}$.

s ist in allen drei Variablen r, Δ, n monoton. Zudem gilt

a) $s_n(r, \Delta) \geq r$, $\lim\limits_{\Delta \to o} s_n(r, \Delta) = r$

b) $\lim\limits_{r \to o} s_n(r, \Delta) = o$

c) $s_n(r, \Delta) \leq r + \Delta$

d) $\lim\limits_{r \to \infty} (r + \Delta - s_n(r, \Delta)) = o$

e) $s_n(r, \Delta) = o(r^{\frac{1}{n}})$ bei $r = o$

f) $\lim\limits_{n \to \infty} s_n(r, \Delta) = r + \Delta$

a) zeigt, daß im Grenzfall normaler Matrizen wieder die Sätze 1 und 2 herauskommen. b) ist die im Anschluß an Satz 3 versprochene Eigenschaft der Abschätzung (8). c) zeigt, daß Satz 4 immer schärfere Aussagen als Satz 3 liefert. Jedoch ergeben sich im Grenzfall $r \to \infty$ und $n \to \infty$ die gleichen Abschätzungen (d, f).

5. WEITERE EINSCHLIESSUNGEN

Wenn A *normalisierbar* ist, existiert ein nichtsinguläres T mit $A = T^{-1}DT$. Mit $cond(T) = \|T\| \, \|T^{-1}\|$ folgt nun leicht

$$\min |\lambda_i - m| \le cond(T)\, r_2 \quad \text{bzw.} \quad \min |\lambda_i - m_1| \le cond(T)\, r_1$$

Jedenfalls ist $|\lambda_i - m| \le O(r)$, während (8) wegen e) nur die Aussage $|\lambda_i - m| \le O(r^{\frac{1}{n}})$ ergibt.

Daher liegt es nahe, bei *asymptotischen* Aussagen dieser Art auch die *Elementarteiler* zu berücksichtigen.

SATZ 5: *Es sei $A = TJT^{-1}$, J die Jordansche Normalform von A, die ausserhalb der Hauptdiagonalen höchstens in der darüberliegenden Diagonalen Elemente $\neq 0$, und zwar $= 1$ hat. $\|T\|_1 \, \|T^{-1}\|_1 = cond_1(T)$. Falls m kein Eigenwert von A ist, gelte zusätzlich $\|(A - mE)^{-1}\|^{-1} \le r$. Dann ist*

$$\min |\lambda_i - m| \le s_k(r \cdot cond_1(T), 1) \tag{9}$$

wobei k die grösste vorkommende Elementarteilerlänge ist.

Beweis: Für m = Eigenwert ist nichts zu beweisen. Andernfalls erhält man leicht

$$\|(J - mE)^{-1}\|^{-1} \le r \, cond_1(T).$$

Nun geht man genau so vor wie im Beweis zu Satz 4. Man berücksichtigt dabei jedoch:

$$\|(J - mE)^{-1}\|_1 = \max_{\nu} \|(J_\nu - mE_\nu)^{-1}\|_1 = \|(J_\mu - mE_\mu)^{-1}\|_1 \quad ,$$

da J eine verallgemeinerte Diagonalmatrix ist, die in Blöcke der Dimensionen $\le k$ zerfällt. $(J_\mu - mE_\mu)^{-1}$ kann explizit berechnet werden, ebenso die Zeilensummennorm

$$\|(J_\mu - mE_\mu)^{-1}\|_1 = f_s(|m - \lambda_\mu|^{-1}), \qquad s = \dim J_\mu .$$

Wie in Satz 4 folgt daraus nun die Behauptung (9), nur zunächst mit s anstelle von k. Da die rechte Seite in k monoton ist, folgt die Behauptung.

Bei $r = o$ erhält man also die Aussage

$$\min |\lambda_i - m| \leq O(r^{\frac{1}{k}})$$

die die beiden zu Anfang gemachten asymptotischen Aussagen umschließt.

Das folgende Beispiel zeigt, daß nicht mehr viel verbessert werden kann:

Sei A eine *Forsythe-Matrix*, d.h. $a_{ik} = \delta_{i,k-1}$, $x_c = (1, c, c^2, \quad , c^{n-1})$.
Dann ist $m_1 \sim c$ bei $c = o$, $r_1 \sim c^n$, $cond_1(T) = cond_1(E) = 1$. Also ist

$$\min |\lambda_i - m_1| = |m_1| \sim r_1^{\frac{1}{n}} \sim s_n(r_1 \cdot 1, 1)$$

Dasselbe Beispiel zeigt auch, daß die Abschätzung (8) nicht verbessert werden kann.

6. ABSCHÄTZUNGEN FÜR DIE SPEKTRALVARIATION

Seien A, B zwei Matrizen mit Eigenwerten λ_i bzw. μ_i.

$$s_A(B) = \max_i \{ \min_j |\mu_i - \lambda_j| \}$$

heißt die ***Spektralvariation*** von B bezüglich A [3].

Die anschauliche Deutung ist die folgende: Man schlage um jeden Eigenwert von A einen Kreis mit dem Radius $s_A(B)$. Dann ist in der Vereinigung aller dieser Kreise das gesamte Spektrum von B enthalten.

HENRICI [3] zeigt, daß

$$s_A(B) \leq \frac{\Delta}{g(y)} \quad \text{mit} \quad \Delta = \Delta_\sigma(A) \qquad y = \frac{\Delta}{\sigma(B-A)}$$

falls $\Delta \neq o$ ist. Hierbei ist also

$$(10) \qquad s_A(B) \leq O([\sigma(B-A)]^{\frac{1}{n}})$$

Ist A *normalisierbar*, $A = TDT^{-1}$, $cond(T) = \sigma(T^{-1})\,\sigma(T)$, so gilt nach BAUER und FIKE [5] $s_A(B) \leq cond(T)\,\sigma(B-A)$, d.h.

$$s_A(B) \leq O(\sigma(B-A)) \tag{11}$$

Mit ähnlichen Mitteln wie bei Satz 5 kann man nun den folgenden Satz erhalten:

SATZ 6: *Sei* $A = SJS^{-1}$, *J die Jordansche Normalform wie in Satz 5,* $B-A \neq o$, $cond_1(S) = \| S^{-1} \|_1 \, \| S \|_1$. *Dann gilt*

$$s_A(B) \leq s_k(\| B-A \|_1 \cdot cond_1(S), 1), \tag{12}$$

wobei k *die grösste vorkommende Elementarteilerlänge ist. Es ist daher*

$$s_A(B) \leq O([\sigma(B-A)]^{\frac{1}{k}}).$$

Die letzte Aussage, in die die Äquivalenz der Matrixnormen eingeht, umfaßt die Ergebnisse (10) und (11).

7. DIE ALLGEMEINE EIGENWERTAUFGABE

Die Erweiterung dieser Sätze auf allgemeine Eigenwertaufgaben der Form $Ax = \lambda Bx$ scheint nicht möglich zu sein. Es kommt dabei nämlich auf $\Delta_\nu(AB^{-1})$ an. Aber da sich jede Matrix etwa als Produkt zweier symmetrischer oder als Produkt einer unitären (daher normalen) und einer positiv definiten Matrix darstellen läßt, ist $\Delta_\nu(AB^{-1})$ sicher nicht durch $\Delta_\nu(A)$ und $\Delta_\nu(B)$ bestimmbar.

* * *

[1] Wie ich nachträglich bemerkte, ist Satz 4 einem von HENRICI [3] ohne Beweis zitierten Ergebnis von D.D. MORRISON [6] sehr ähnlich, wenn man noch (4) berücksichtigt. Das angegebene Ergebnis ist sicher für die euklidische Norm korrekt. Für $\nu = \| \; \|_1$ gibt es Gegenbeispiele.

LITERATUR

1. Wielandt, H.: Ein Einschließungssatz für die Eigenwerte normaler Matrizen. Arch. d. Math. 1 (1948/49), 348-352.

   Wielandt, H.: Die Einschließung von Eigenwerten normaler Matrizen. Math. Annalen 121 (1949/50).

2. Zurmühl, R.: Matrizen. Berlin-Göttingen-Heidelberg, 2. Auflage (1958).

3. Henrici, P.: Bounds for iterates, inverses, spectralvariation and fields of values of non-normal matrices. Num. Math. 4 (1962), 24-40.

4. Hadeler, K.P.: Einschließungssätze bei normalen und bei positiven Operatoren. Dissertation Hamburg (1965).

5. Bauer, F.L. and C.T. Fike: Norms and exclusion theorems. Num. Math. 2 (1960), 137-141.

6. Morrison, D.D.: Errors in the solution of eigenvalue problems by finite difference methods. Ph. D. Dissertation, University of California, Los Angeles (1961).

Institut für Angewandte Mathematik
der Universität Hamburg