
Zur Darstellung und Untersuchung von Funktionen im Mathematikunterricht mittels elektronischer Analogrechner

Von Peter Rasfeld in Mülheim-Ruhr

In diesem Beitrag soll gezeigt werden, daß elektronische Analogrechner, wie sie von verschiedenen Firmen heute für den Schulgebrauch auf dem Lehrmittelmarkt angeboten werden, von beachtlichem Wert bei der Untersuchung funktionaler Zusammenhänge im Mathematikunterricht sein können. Während nur wenige Grundkenntnisse zur Herstellung der erforderlichen Rechenschaltungen auf einem solchen Rechner erforderlich sind, lassen sich mit ihrer Hilfe die Graphen der Funktionen z.B. auf einem Oszilloskop eindrucksvoll sichtbar machen (u.U. gleichzeitig mit einigen Ableitungsfunktionen) und insbesondere unmittelbar beobachten, wie sich Änderungen von Vorzeichen oder Parametern auf ihren Verlauf auswirken.

Elektronische Digitalrechner, angefangen von einfachen Taschenrechnern bis hin zu Rechenanlagen respektablen Umfangs, gelangen im mathematischen und naturwissenschaftlichen Unterricht heute mehr und mehr zur Anwendung. Im Vergleich hierzu führen die auf dem Lehrmittelmarkt angebotenen elektronischen Analogrechner in den Schulen ein bescheidenes Dasein. Ebenso wird auf den Gebrauch von Rechenstäben, die zu den einfachsten analogen Rechenhilfsmitteln gehören, immer mehr zugunsten von Taschenrechnern verzichtet, obwohl es aus didaktischer Sicht gute Gründe für die Verwendung von Rechenstäben gibt, die vom Verfasser vielleicht einmal in einem späteren Artikel diskutiert werden.

Unbestritten haben elektronische Digitalrechner gegenüber elektronischen Analogrechnern heute die größere Bedeutung und lassen sich universeller einsetzen. Die einseitige Favorisierung des Digitalrechners für die Unterrichtspraxis kann jedoch nicht mit der gelegentlich vorgetragenen Vermutung gerechtfertigt werden, daß Analogrechner im Zuge der weiteren Entwicklung der Digitaltechnik an Bedeutung mehr und mehr verlieren werden. Auch die Analogrechner haben, wie von kompetenter Seite dargestellt wird (vgl. z.B. [1]), in den letzten Jahren eine beachtliche Entwicklung erfahren und sich dadurch neben den Digitalrechnern behaupten können.

Dabei ist die Einteilung der Rechengeräte in Digital- und Analogrechner nicht nur auf elektronische beschränkt, sondern vielmehr fundamental und durchzieht, wie *Oberschelp* in [2, S. 260–261] bemerkt, die gesamte Rechentechnik. Allein aus dieser Perspektive erscheint es wünschenswert, den Schülern im Unterricht über die Verwendung eines z.B. elektronisch arbeitenden Analogrechners deutlich zu machen, daß es neben der digitalen eine prinzipiell andere Form der Verarbeitung von Daten gibt.

Diese besteht, kurz gesagt, grundsätzlich darin, daß Rechengrößen durch i.a. stetig veränderliche physikalische Größen dargestellt werden, die in einem physikalischen System in gleicher Weise miteinander zu verknüpfen sind, wie die Rechengrößen aus der zu bearbeitenden Aufgabe. Erinnert sei in diesem Zusammenhang nochmals an den handelsüblichen Rechenstab, bei dem bekanntlich Zahlen durch Strecken repräsentiert werden, die den Logarithmen der Zahlen proportional sind, so daß sich durch Aneinanderlegung von Strecken die Multiplikation der zugehörigen Zahlen durchführen läßt.

Bei elektronischen Analogrechnern werden die abhängigen Variablen des zu untersuchenden Problems durch zeitlich veränderliche elektrische Spannungen dargestellt, die unabhängige Veränderliche durch die Rechenzeit. Gewöhnlich sind sie nach dem Baukastenprinzip aufgebaut, d.h. sie bestehen aus einer Anzahl von Rechenelementen, mit denen jeweils bestimmte mathematische Operationen (z.B. Additionen, Integrationen) durchgeführt wer-

den können und die zur Lösung einer Aufgabe in geeigneter Weise miteinander zu verbinden sind.

Nun liefert das vorgetragene Argument sicherlich keine hinreichende Rechtfertigung für die Verwendung eines elektronischen Analogrechners im mathematischen Unterricht. Es soll daher beispielhaft in Zusammenhang mit dem Thema der Darstellung und Untersuchung von Funktionen versucht werden, auf seinen didaktischen Wert für die Unterrichtspraxis hinzuweisen.

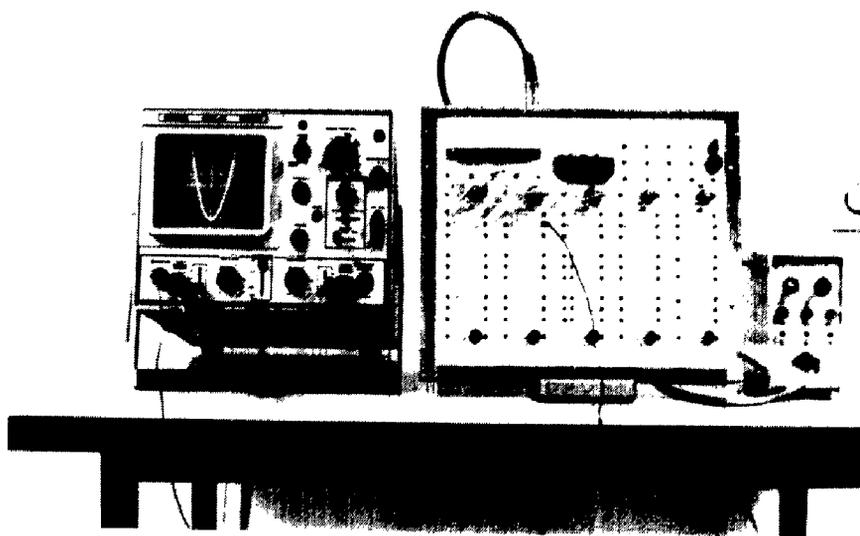


Fig. 1 Nach Fig. 3 beschalteter Analogrechner mit Netzteil und einem Oszilloskop als Ausgabegerät

Fig. 1 zeigt einen nach Fig. 3 beschalteten und für den Schulgebrauch im Forschungs- und Entwicklungszentrum für objektivierte Lehr- und Lernverfahren (FEoLL) in Paderborn entwickelten Analogrechner. Rechts davon erkennt man das Netzteil und links ein als Ausgabegerät verwendetes Oszilloskop, auf dessen Bildschirm eine Parabel zu sehen ist. Auf der Frontplatte des Rechners (dem Programmierfeld) befinden sich die Ein- und Ausgänge der verschiedenen, hier symbolisch dargestellten Rechenelemente, die im folgenden (Fig. 2) beschrieben werden.

An die Ein- und Ausgänge der Rechenelemente sind nicht die an diesen auftretenden Spannungen geschrieben worden, die sich im übrigen alle auf Masse beziehen, sondern die Quotienten aus diesen und der maximal zulässigen Rechenspannung, die z.B. beim FEoLL-Analogrechner $\pm 10\text{ V}$ beträgt. Das hat den Vorteil, daß man es mit dimensionslosen Größen zu tun hat, die unabhängig von den Arbeitsbereichen verschiedener Rechner grundsätzlich nur zwischen -1 und $+1$ liegen können. Wegen der Beschränktheit dieser „Maschinenvariablen“ wie auch der „Maschinenzeit“ lassen sich die Variablen eines zu untersuchenden Problems, die „Problemvariablen“, größenordnungsmäßig auf dem Analogrechner i.a. nicht unmittelbar als Maschinenvariablen verwenden, sondern müssen mit Hilfe geeigneter Maßstabsfaktoren in diese transformiert werden. Um den Umfang der Darstellung aber nicht zu groß werden zu lassen, wird im folgenden nur mit Maschinenvariablen gearbeitet, also vorausgesetzt, daß alle auftretenden Größen stets auf dem Rechner verarbeitbar sind.

Ebenso sei auf eine Beschreibung der technischen Realisationsmöglichkeiten der genannten Bausteine verzichtet, da sie für das Verständnis des folgenden nicht unbedingt erforderlich ist. Ausführliche Darstellungen findet man hierzu z.B. in [3], [4], [5] und [6].

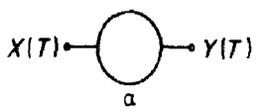
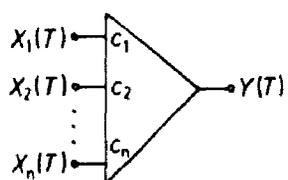
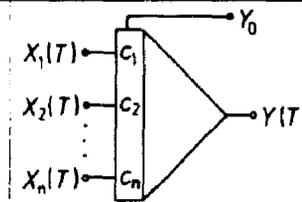
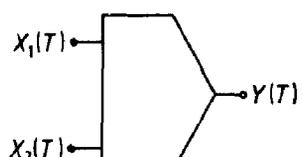
Benennung	Symbol	Math. Formulierung
Koeffizientenpotentiometer		$Y(T) = \alpha \cdot X(T)$ mit $0 \leq \alpha \leq 1$
Summierer		$Y(T) = - \sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i(T)$
Integrierer		$Y(T) = - \int_0^T \sum_{i=1}^n c_i \cdot X_i(T) dT$ • Y_0 mit $Y(0) = Y_0$
Multiplizierer		$Y(T) = X_1(T) \cdot X_2(T)$

Fig. 2 Beschreibung der wichtigsten Bausteine eines elektronischen Analogrechners

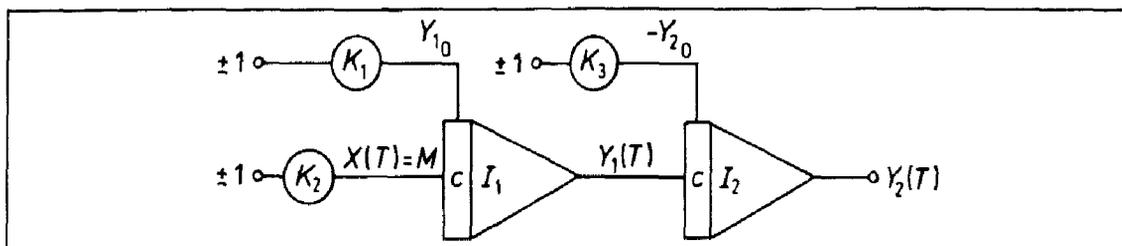


Fig. 3 Rechenschaltung für $Y(T) = \frac{c^2 \cdot M}{2} T^2 + c \cdot Y_{10} \cdot T + Y_{20}$

Wie schon angedeutet, werden die Rechenelemente zur Lösung von Aufgaben in geeigneter Weise miteinander verbunden. Fig. 3 zeigt eine Rechenschaltung zur Untersuchung der allgemeinen quadratischen Funktionen, nach der auch der FEO LL Analogrechner in Fig. 1 beschaltet worden ist.

An die Eingänge der Koeffizientenpotentiometer wird wahlweise +1 oder -1 gelegt, je nachdem, welche Vorzeichen man für die Glieder der Funktion gerade realisieren will. Dabei ist zu berücksichtigen, daß Summen und Integrale an den Ausgängen der betreffenden Bausteine aus technischen Gründen stets mit dem Faktor -1 behaftet auftreten (vgl. auch Fig. 2).

Mit Hilfe des Koeffizientenpotentiometers K_2 wird dem Eingang des Integrierers I_1 mit dem Bewertungsfaktor c eine Konstante M zugeführt (bei Summieren oder Integrierern werden alle Eingangsgrößen mit Faktoren c , die beim FEO LL-Analogrechner z.B. 1, 10 oder 100 betragen können, multipliziert). Wie sich Fig. 2 entnehmen läßt, kann man an einem Integrierer an einer zusätzlichen Buchse eine Integrationskonstante $Y(0) = Y_0$ einstellen, die ebenfalls mit dem Faktor -1 behaftet am Ausgang auftritt. Damit zum Zeitpunkt $T=0$ am Ausgang von $I_1 - Y_1(0) = -Y_{10}$ auftritt, ist diese Größe mit umgekehrtem Vorzeichen auf die Buchse „Anfangsbedingung“ zu geben.

Damit erhält man als Ausgangsgröße von I_1

$$Y_1(T) = - \int_0^T c \cdot M dT - Y_{10} = -c \cdot M \cdot T - Y_{10}.$$

Die Ausgangsgröße $Y_1(T)$ bildet die Eingangsgröße des Integrierers I_2 , dessen Buchse Anfangsbedingung mit Hilfe von K_3 mit $-Y_2(0) = -Y_{20}$ belegt wird. Am Ausgang von I_2 liegt damit

$$\begin{aligned} Y_2(T) &= - \int_0^T c \cdot Y_1(T) dT + Y_{20} = -c \int_0^T (-c \cdot M \cdot T - Y_{10}) dT + Y_{20} \\ &= \frac{c^2 \cdot M}{2} T^2 + c \cdot Y_{10} \cdot T + Y_{20}. \quad \text{Mit } \frac{c^2 \cdot M}{2} = p \text{ und } c \cdot Y_{10} = q \text{ erhält man} \\ Y_2(T) &= p \cdot T^2 + q \cdot T + Y_{20}. \end{aligned}$$

Die Parameter p , q und Y_{20} lassen sich positiv wie negativ wählen, indem man an die Koeffizientenpotentiometer unter Beachtung der invertierenden Eigenschaften der Integrierer $+1$ bzw. -1 legt, und durch Veränderung der Größen $X(T) = M$, Y_{10} und Y_{20} an K_2 , K_1 und K_3 leicht variieren. Am Oszilloskop können dabei die Auswirkungen auf den Funktionsverlauf unmittelbar beobachtet werden. Um dabei „stehende“ Bilder auf dem Oszilloskop zu erhalten, muß ein Analogrechner repetierend arbeiten, d.h. der Ablauf der Rechnung ist periodisch zu wiederholen.

Legt man z.B. an $K_2 +1$ und an K_1 und $K_3 -1$, so werden $p > 0$, $q < 0$ und $Y_{20} > 0$. Vergrößert man nunmehr etwa an $K_2 X(T) = M$ und damit p , so beobachtet man, wie die Parabel im T/Y -System zunehmend in Y -Richtung gestreckt und in Richtung abnehmender T und wachsender Y verschoben wird.

Die in Fig. 3 angegebene Rechenschaltung liefert eine gewünschte Funktion zunächst nur für Werte $T > 0$, doch kann man mühelos auch Kurvenabschnitte links von der Ordinatenachse sichtbar machen, z.B. indem man anstelle von $Y = f(T)$ zu $Y = f(-T)$ eine Rechenschaltung entwickelt (vgl. [7, S. 219]). In der vorliegenden Rechenschaltung braucht man dazu lediglich die Anfangsbedingung des Integrierers I_1 mit umgekehrtem Vorzeichen einzugeben. Ebenso läßt sich anstelle von $Y = f(T)$ $Y = f(T - T_c)$ zugrunde legen (was ebenfalls lediglich veränderte Anfangsbedingungen an den Integrierern erforderlich macht) und auf diese Weise die Kurve um T_c -Einheiten auf der Zeitachse nach rechts verschieben. Schließlich kann man sich auch von der Zeitablenkung des Oszilloskops unabhängig machen und hierfür einen eigenen Integrierer verwenden. Durch Anlegen einer Größe $Y_0 > 0$ auf die Buchse „Anfangsbedingung“ (die am Ausgang mit umgekehrtem Vorzeichen auftritt!) werden auch Kurvenabschnitte links von der Ordinatenachse darstellbar.

Mit dem letzten Verfahren ist außerdem die Möglichkeit gegeben, auf einem Oszilloskop oder x/y -Schreiber die Graphen der Umkehrfunktionen sichtbar zu machen bzw. aufzuzeichnen. Hierzu ist es lediglich erforderlich, die vom Analogrechner gelieferten Spannungen für die Horizontal- und Vertikalablenkung miteinander zu vertauschen. Natürlich wird dabei vorausgesetzt, daß die Funktion selbst in einem solchen Bereich betrachtet worden ist, indem sie umkehrbar eindeutig ist.

Fig. 4 zeigt den auf diese Weise mittels eines x/y -Schreibers aufgezeichneten Graphen der Funktion $Y = \frac{1}{4} T^2$ sowie den der Umkehrfunktion $Y = 2\sqrt{T}$. Dabei ist die zugehörige Rechenschaltung auf dem Analogrechner der Firma Leybold gesteckt worden, da der FEOLL-Analogrechner in Kombination mit Schreibern weniger gut geeignet ist. Dasselbe gilt für die entsprechenden folgenden Fälle.

Die Rechenschaltung in Fig. 3 liefert weiterhin nicht nur $Y(T)$, sondern am Aus- und

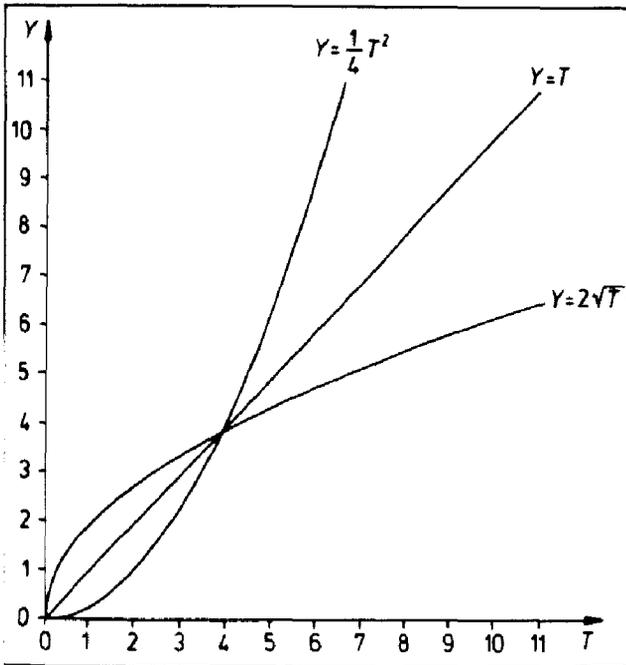


Fig. 4 Der Graph der Funktion $Y = \frac{1}{4}T^2$ und der der Umkehrfunktion $Y = 2\sqrt{T}$, aufgezeichnet mit Hilfe eines x/y-Schreibers unter Verwendung der Rechenschaltung in Fig. 3

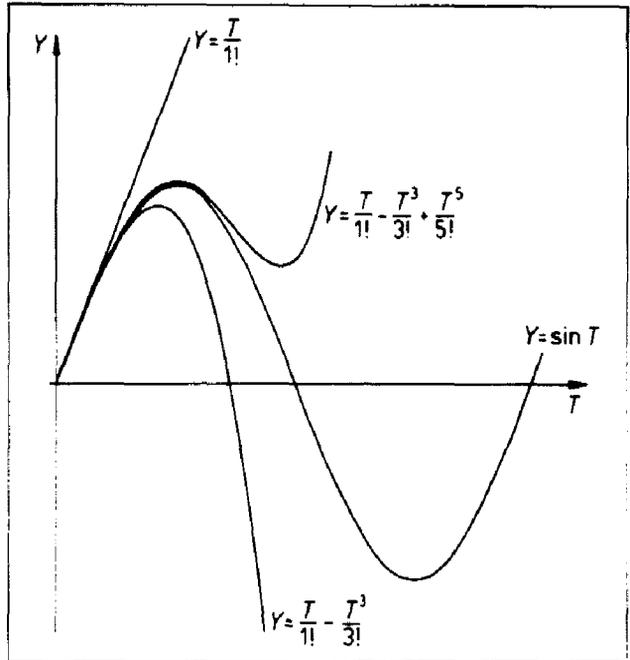
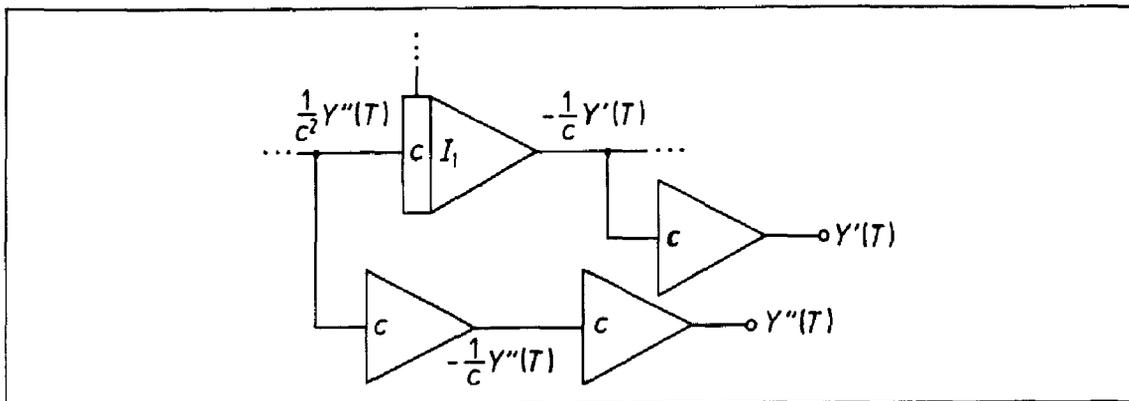


Fig. 6 Approximation von $Y = \sin T$ über eine Potenzreihenentwicklung, aufgezeichnet mittels eines x/y-Schreibers unter Verwendung einer Integriererkette

Fig. 5 Die Rechenschaltung in Fig. 3 liefert unter Zuhilfenahme dreier Summierer auch die Funktionen der 1. und 2. Ableitung



Eingang des Integrierers I_1 auch $-\frac{1}{c} Y'(T)$ und $\frac{1}{c^2} Y''(T)$. Wie Fig. 5 zeigt, kann man hieraus mittels dreier Summierer leicht $Y'(T)$ und $Y''(T)$ erzeugen.

Steht ein Oszilloskop mit mehreren Kanälen zur Verfügung, lassen sich alle Funktionen u.U. gleichzeitig sichtbar machen. Insbesondere hierdurch wird der Analogrechner zu einem wertvollen Hilfsmittel in Zusammenhang mit Kurvendiskussionen.

Aus den vorangehenden Ausführungen zur Rechenschaltung in Fig. 3 geht hervor, daß an den Ausgängen der Integrierer I_1 und I_2 eine allgemeine lineare und quadratische Funktion vorliegen. Durch Hinzufügen eines dritten und vierten Integrierers ließen sich ganze rationale Funktionen 3. und 4. Grades und allgemein durch n hintereinandergeschaltete Integrierer solche n . Grades erzeugen (vgl. [5, S. 47–49]). Allerdings gilt dies nur so lange,

wie keiner der Integrierer übersteuert wird, was bei wiederholter Integration u.U. schnell erreicht werden kann. Hierüber hinaus besteht die Möglichkeit, entsprechende Rechenschaltungen mit Hilfe von Multiplizierern aufzubauen (vgl. ferner auch [8, S. 171–172]).

Mithin läßt sich eine Funktion am Analogrechner auch als Summe einer *Taylor*schen Reihe erzeugen (sofern sie überhaupt in eine solche entwickelbar ist). Die jeweiligen Potenzen von T können an den Ausgängen von hintereinandergeschalteten Integrierern abgegriffen und an Summierbausteinen aufsummiert werden, wobei sich die Multiplikationen mit den erforderlichen Konstanten ebenfalls an den Integrierern oder Summierern, gegebenenfalls unter Hinzufügung von Koeffizientenpotentiometern, vornehmen lassen. Wenn man die darzustellende Funktion zunächst auf andere Weise, z.B. über eine Differentialgleichung (vgl. Ausführungen im folgenden), erzeugt, kann man gut deutlich machen, wie sich die Kurve mit wachsender Anzahl der berücksichtigten Glieder der Reihe immer besser der darzustellende Kurve anschmiegt. Fig. 6 zeigt dies am Beispiel der Sinusfunktion (vgl. auch [9, S. 84–85]).

Wie bereits angedeutet, lassen sich viele Funktionen am Analogrechner recht einfach als Lösungen von Anfangswertproblemen gewöhnlicher Differentialgleichungen gewinnen. Daß dieser Weg auch im Unterricht der Sekundarstufe 2 ohne weiteres gangbar ist, mögen die beiden folgenden Beispiele zeigen.

Zu erzeugen sei $Y(T) = Y_0 \cdot e^{k \cdot T}$. Zwischen dieser Funktion und ihrer 1. Ableitung $Y'(T) = k \cdot Y_0 \cdot e^{k \cdot T}$ besteht die Beziehung $Y' = k \cdot Y$. Diese Differentialgleichung hat zu der Anfangsbedingung $Y(0) = Y_0$ eben die Funktion $Y(T) = Y_0 \cdot e^{k \cdot T}$ als Lösung.

Das Prinzip, nach dem solche Differentialgleichungen auf dem Analogrechner gelöst werden, ist immer dasselbe: Zunächst wird die Differentialgleichung nach der höchsten vorkommenden Ableitung aufgelöst, was hier bereits geschehen ist. Außerdem sei $k = c \cdot b$ gesetzt, womit sich die Differentialgleichung auf die Form $\frac{1}{c} Y' = b \cdot Y$ bringen läßt.

Man nimmt nun an, man habe $\frac{1}{c} Y'(T)$ zur Verfügung und gibt dieses auf einen Integrierer mit der Eingangsbewertung c (Fig. 7). Nach den vorangehenden Ausführungen (vgl. insbesondere Fig. 2) erscheint dann an dessen Ausgang $-Y(T)$. Mittels eines Summierers mit der Eingangsbewertung 1, einem sogen. Inverter, wird eine Vorzeichenumkehr bewirkt, so daß man an dessen Ausgang die gewünschte Funktion $Y(T)$ abgreifen kann. Damit nun dem Eingang des Integrierers tatsächlich $\frac{1}{c} Y'(T)$ zugeführt wird, multipliziert man mit Hilfe eines Koeffizientenpotentiometers K_1 $Y(T)$ mit b . Da nun $b \cdot Y(T)$ gleich $\frac{1}{c} Y'(T)$ sein soll, koppelt man den Ausgang von K_1 zurück in den Eingang des Integrierers. Zum Zeitpunkt $T=0$ soll am Ausgang des Integrierers $-Y_0$ liegen, weshalb man diese Größe schließlich noch mit umgekehrtem Vorzeichen über das Koeffizientenpotentiometer K_2 auf die Buchse Anfangsbedingung des Integrierers gibt.

Fig. 8 zeigt den nach Fig. 7 beschalteten FEoLL-Analogrechner, zusammen mit einem Oszilloskop als Ausgabegerät. An diesem läßt sich wieder sehr anschaulich verfolgen, wie sich Veränderungen der Parameter Y_0 und k , die man an den beiden Koeffizientenpotentiometern leicht vornehmen kann, auf den Funktionsverlauf auswirken.

Entfernt man in der Rechenschaltung der Fig. 7 den Inverter und legt an K_2 -1 anstelle von $+1$, so lautet die zugehörige Differentialgleichung $Y' = -k \cdot Y$ mit $Y(0) = Y_0$ als Anfangsbedingung. Sie hat $Y = Y_0 \cdot e^{-k \cdot T}$ als Lösung.

So gewonnene Funktionen lassen sich auf dem Analogrechner weiter verarbeiten. Man kann beispielsweise Summen oder Produkte bilden oder sie als Störfunktionen in anderen

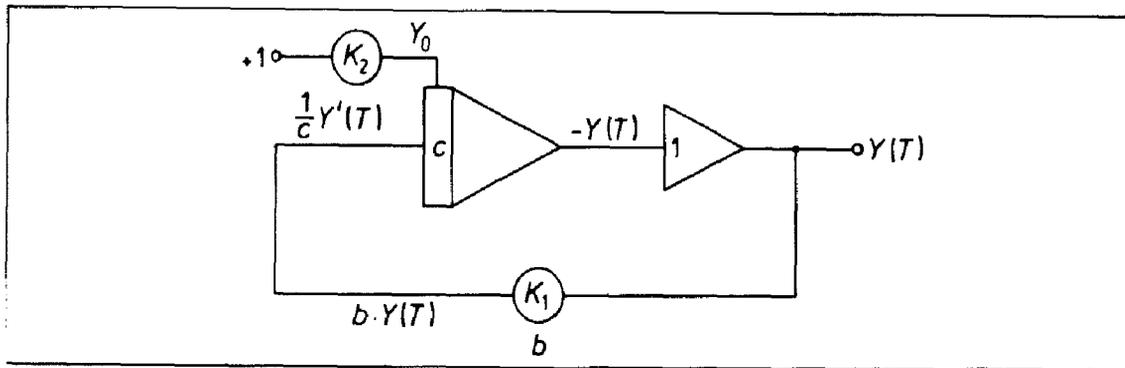
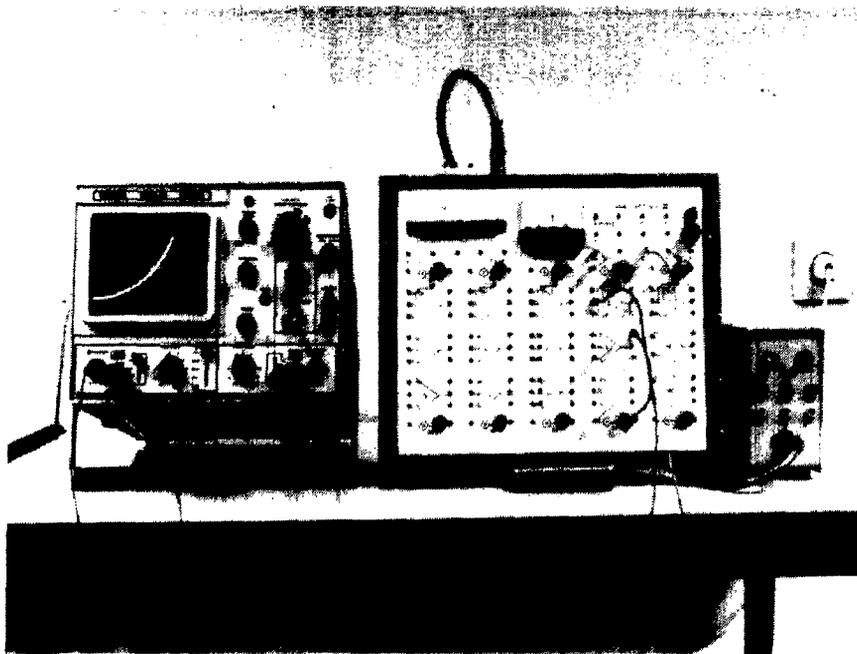


Fig. 7 Rechenschaltung für die Funktion $Y = Y_0 \cdot e^{-k \cdot T}$ mit $k = c \cdot b$

Fig. 8 Der nach Fig. 7 beschaltete FEOll-Analogrechner mit einem Oszilloskop als Ausgabegerät



Differentialgleichungen verwenden. Aus den eben erwähnten Funktionen $Y(T) = Y_0 \cdot e^{k \cdot T}$ und $Y(T) = Y_0 \cdot e^{-k \cdot T}$ kann man z.B. mit Hilfe von Summierern und Koeffizientenpotentiometern leicht

$$Y_0 \frac{e^{k \cdot T} + e^{-k \cdot T}}{2} = Y_0 \cdot \cosh k \cdot T \text{ erzeugen.}$$

Als zweites Beispiel soll über eine Differentialgleichung eine Rechenschaltung für $Y = \sin T$ entwickelt werden. Nach demselben Prinzip ließe sich auch eine Schaltung für den allgemeineren Fall $Y(T) = a \cdot \sin b(T+c) + d$ entwerfen, worauf hier verzichtet sei. Mit $Y' = \cos T$ und $Y'' = -\sin T$ erhält man als Differentialgleichung $Y'' = -Y$ mit den beiden Anfangsbedingungen $Y'(0) = 1$ und $Y(0) = 0$. Fig. 9 zeigt die zugehörige Rechenschaltung.

Wie man dieser entnehmen kann, liefert sie neben $\sin T$ auch $-\sin T$ und $-\cos T$. Dies läßt sich bei der Darstellung bestimmter Kurven in Parameterdarstellung ausnutzen. Hierfür benötigt man als Ausgabegerät einen x/y -Schreiber oder ein Oszilloskop.

Ein sehr einfacher Fall liegt bei der Ellipse vor. Eine Parameterdarstellung ist beispielsweise

$$\begin{aligned} X(T) &= a \cdot \cos T \\ Y(T) &= b \cdot \sin T. \end{aligned}$$

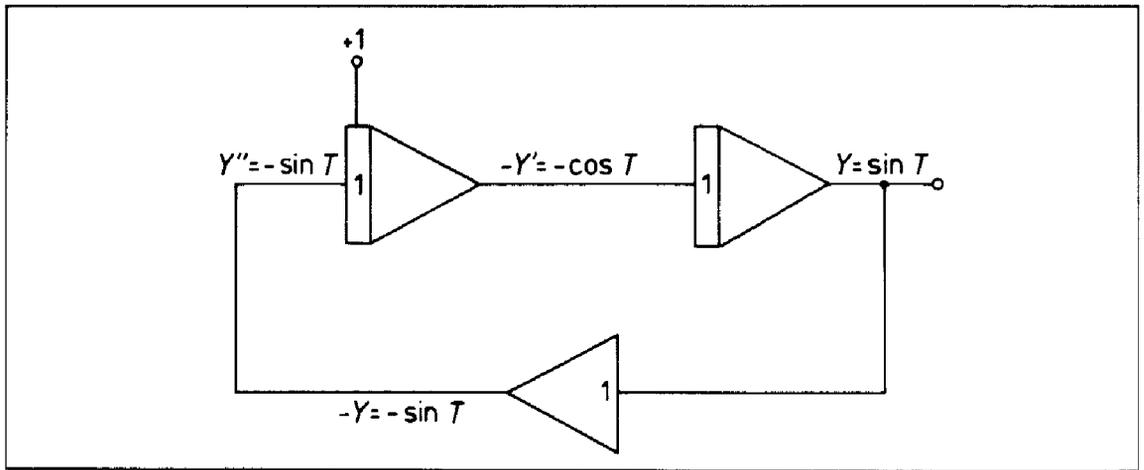


Fig. 9 Rechenschaltung für die Funktion $Y = \sin T$

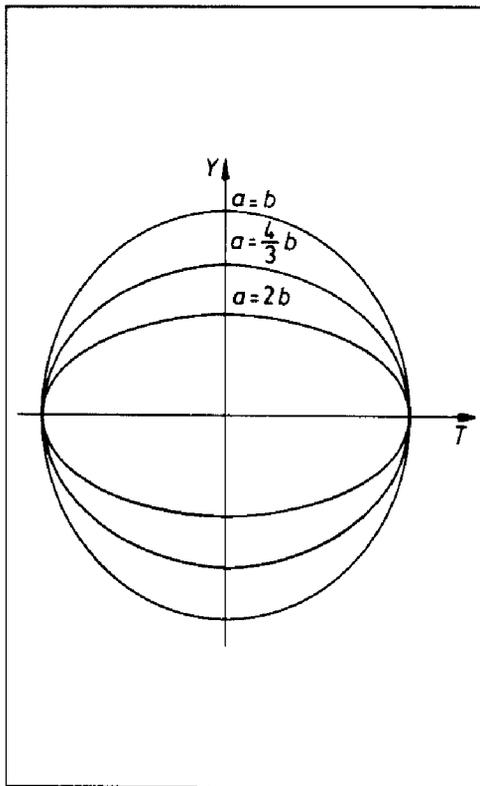


Fig. 10 Kurven mit der Parameterdarstellung
 $X(T) = a \cdot \cos T$, $Y(T) = b \cdot \sin T$,
 aufgezeichnet mit Hilfe eines x/y -
 Schreibers unter Verwendung der
 Rechenschaltung in Fig. 9

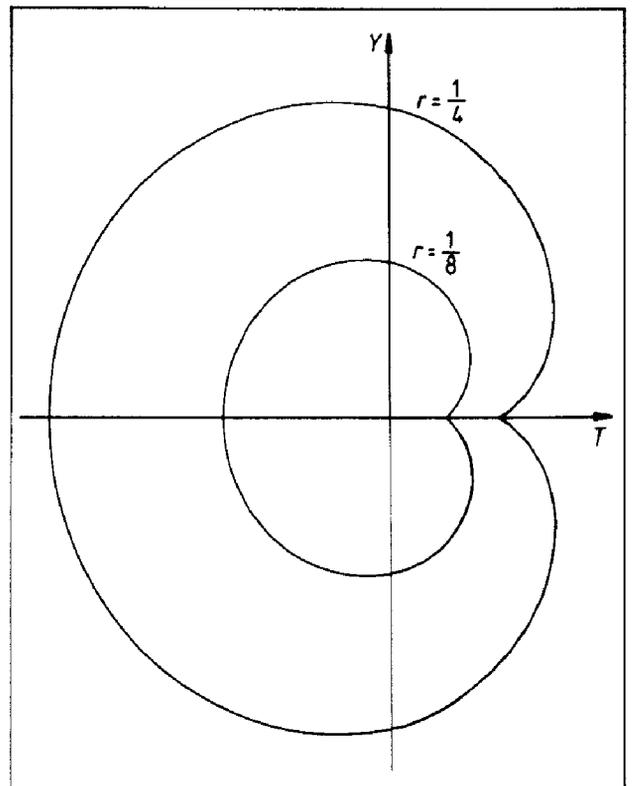


Fig. 11 Kurven mit der Parameterdarstellung
 $X(T) = r(2 \cos T - \cos 2T)$,
 $Y(T) = r(2 \sin T - \sin 2T)$,
 aufgezeichnet mittels eines x/y -
 Schreibers unter
 Zugrundelegung der Rechenschaltung in Fig. 9

Die Funktionen $X(T)$ und $Y(T)$ können an den beiden Integrierern der Rechenschaltung in Fig. 9 abgegriffen und nach Multiplikation mit den Konstanten a bzw. b über Koeffizientenpotentiometer und/oder Summierer sowie, falls erforderlich, nach Multiplikation mit -1 über Inverter den beiden Eingängen eines der beiden betreffenden Ausgabegeräte zugeführt werden. Fig. 10 zeigt einige auf diese Weise aufgezeichnete Kurven. Im Falle $a = b$ erhält man bekanntlich einen Kreis.

Die Rechenschaltung in Fig. 9 kann schließlich auch zugrunde gelegt werden, wenn man z.B. eine Kardioide aufzeichnen will, für die eine Parameterdarstellung lautet

$$X(T) = r(2 \cos T - \cos 2T) \quad Y(T) = r(2 \sin T - \sin 2T).$$

Die Glieder $\sin 2T$ und $\cos 2T$ lassen sich dabei über die Beziehungen $\sin 2T = 2 \sin T \cdot \cos T$ und $\cos 2T = 1 - 2 \sin^2 T$ mittels Multiplizierer erzeugen. Fig. 11 zeigt mit Hilfe eines x/y -Schreibers aufgezeichnete Kardioiden.

Literatur

- [1] Spiess, R.H.: A viewpoint on analog simulation. *Simulation* **29** (1977), No. 5, pp. 181–182.
- [2] Behnke, H./H. Tietz (Hrsg.): *Mathematik 2*. Fischer Taschenbuch, Frankfurt a.M. 1966.
- [3] Bernhard, J.H.: *Analoge Rechentechnik kurz und bündig*. Analoge-Rechentechnik-Skelett. Verlag Vogel, Würzburg 1968.
- [4] Giloi, W./R. Herschel: *Rechenanleitung für Analogrechner*. Unveränderter Nachdruck der 1. Auflage aus dem Jahre 1961. Telefunken Fachbuch. AEG-Telefunken, Fachbereich Prozeßtechnik, Konstanz o.J.
- [5] Hund, M.: *Der Analogrechner*. Beschreibung mit 150 Programmbeispielen aus Mathematik, Regelungstechnik und Physik. Leybold-Heraeus, Köln 1976.
- [6] Heinhold, H./U. Kulisch: *Analogrechnen*. Eine Einführung. Bibliographisches Institut, Mannheim 1969.
- [7] Kovach, L.D.: The advantages of teaching mathematics with analog computers. *Simulation* **4** (1965), No. 4, pp. 219–221.
- [8] Newton, T.A.: On using the electronic analog computer to illustrate mathematical concepts. In: *The influence of computing on mathematical research and education* (Editor J.P. Lasalle). American Mathematical Society, Providence, Rhode Island 1974, pp. 161–174.
- [9] Vansteenkiste, G.C.: Simulation in mathematics education. *International journal of mathematical education in science and technology* **6** (1975), No. 1, pp. 83–86.

Anschrift des Verfassers:

Dr. Peter Rasfeld, Klöttchen 54, 4330 Mülheim-Ruhr

Ein problemorientierter Weg zum Höhensatz

Von Harald von Majewski in Minden

W. Kroll empfiehlt in *PM 22* (1980), S. 204, mit gutem Grund, die Sätze von *Euklid* nur im Rahmen der Flächeninhaltslehre (und nicht von der Ähnlichkeit her) einzuführen. Viele Kollegen werden trotzdem die „schnelleren“ Beweise mit Hilfe ähnlicher Dreiecke vorziehen, einfach um Zeit zu sparen, die in Klasse 9 recht knapp ist.

Für diejenigen aber, die der besseren Motivation wegen etwas mehr Zeit auf die Satzgruppe des *Pythagoras* verwenden wollen, gibt es zum Höhensatz den folgenden Weg, bei dem keine Scherung benötigt wird. Die Schüler erhalten zunächst die Aufgabe, die in der vorgelegten Fig. 1 enthaltenen Klassen kongruenter Strecken und kongruenter Dreiecke anzugeben. Aus dieser Betrachtung ergibt sich die Ergänzungsgleichheit der Rechtecke *EBFK* und *HKGD*, und durch einige Aufgaben zur Flächenverwandlung wird dieses Kenntnis gefestigt. Dabei kann o.B.d.A. *EBFK* als das gegebene Rechteck und $|AE|$ als Repräsentant der gegebenen Seitenlänge des gesuchten Rechtecks verwendet werden. Als Schnittpunkt von \overline{AK} und \overline{BF} erhält man *C* und damit $|CF|$ als zweite Seitenlänge des gesuchten Rechtecks.