Monatshefte für Mathematik 82, 31—50 (1976)

Chu-Dualität und zwei Klassen maximal fastperiodischer Gruppen

Von

Detlev Poguntke, Bielefeld

(Eingegangen am 7. März 1975)

Abstract

Chu-Duality and Two Classes of Maximally Almost Periodic Groups. This is a continuation of the paper „Zwei Klassen lokalkompakter maximal fastperiodischer Gruppen", [6]. In [6], the classes $\mathfrak{A}$ and $\mathfrak{H}$ were introduced. We give sufficient conditions to conclude that G is in $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$) if one knows that G/G_0 is in $\mathfrak{H}$ ($\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$). If a group G is in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ and if G satisfies the Chu-duality then all closed subgroups of G satisfy the Chu-duality. The Chu-quasi-dual of the Heisenberg group H with integral coefficients is computed. It is shown that H does not satisfy the Chu-duality, that H is in $\mathfrak{A}$, and that H is not in $\mathfrak{H}$.

Einleitung

Diese Arbeit ist eine Fortsetzung der Arbeit „Zwei Klassen lokalkompakter maximal fastperiodischer Gruppen", unter [6] im Literaturverzeichnis aufgeführt. Wir setzen hier die Bezeichnungen, Definitionen und Sätze von [6] voraus; mit (i,j), $1 \leqslant i \leqslant 3$, verweisen wir auf Abschnitt (i,j) von § i in [6], deswegen haben die drei Paragraphen dieser Arbeit die Nummern 4, 5, 6 erhalten. In § 4 wird gezeigt: Ist G eine Gruppe in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$, die der Chu-Dualität genügt, so genügt auch jede abgeschlossene Untergruppe von G der Chu-Dualität. In § 5 wird untersucht, wann man aus der Tatsache, daß G/G_0 (G_0 ist stets die Zusammenhangskomponente des Einselementes in der Gruppe G) in $\mathfrak{H}$ bzw. in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ liegt, schließen kann, daß auch G in $\mathfrak{H}$ bzw. in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{H}$ liegt. In § 6 wird die Gruppe $H_3(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \,\middle|\, x,y,z \in \mathbb{Z} \right\}$ eingehend untersucht. Das Chu-Quasi-Dual von $H_3(\mathbb{Z})$ wird bestimmt; es wird gezeigt, daß $H_3(\mathbb{Z})$ nicht der Chu-Dualität genügt. Ferner wird bewiesen, daß $H_3(\mathbb{Z})$ in $\mathfrak{A}$, aber nicht in $\mathfrak{D}$ liegt. Es gibt eine kompakte abelsche Gruppe A derart, daß $H_3(\mathbb{Z})\times A$ nicht in $\mathfrak{A}$ liegt (die (2.13) und (2.14) entsprechenden Sätze sind mithin für die Klasse $\mathfrak{A}$ falsch).

§ 4 Abgeschlossene Untergruppen von Chu-Gruppen

In diesem Paragraphen wollen wir ein hinreichendes Kriterium dafür angeben, daß eine abgeschlossene Untergruppe einer Gruppe, die der Chu-Dualität genügt, ebenfalls der Chu-Dualität genügt. Dieses Kriterium ist eng mit der Definition der Klassen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ verknüpft. Zuvor sei kurz an die Konstruktion von Chu erinnert (vgl. [1] oder [2]). Es sei G eine lokalkompakte Gruppe; für eine natürliche Zahl n sei $\mathrm{Rep}_n(G)$ die Menge der Homomorphismen von G in die unitäre Gruppe $U(n)$, versehen mit der kompakt-offenen Topologie; $\mathrm{Rep}(G)$ sei die topologische Summe der Räume $\mathrm{Rep}_n(G)$, $n\in\mathbb{N}$. Ferner sei $\mathfrak{U}$ die topologische Summe der unitären Gruppen $U(n)$. Dann sei $c\,G$ die Menge aller stetigen Abbildungen Q von $\mathrm{Rep}(G)$ in $\mathfrak{U}$ mit den folgenden Eigenschaften

(1) $f\in\mathrm{Rep}_n(G)\Rightarrow Q(f)\in U(n)$,

(2) $Q(f_1\oplus f_2)=Q(f_1)\oplus Q(f_2)$ für alle $f_1, f_2\in\mathrm{Rep}(G)$,

(3) $Q(f_1\otimes f_2)=Q(f_1)\otimes Q(f_2)$ für alle $f_1, f_2\in\mathrm{Rep}(G)$,

(4) $f\in\mathrm{Rep}_n(G),\ A\in U(n)\Rightarrow Q(AfA^{-1})=A\,Q(f)A^{-1}$.

Versieht man $c\,G$ wiederum mit der kompakt-offenen Topologie und erklärt man auf $c\,G$ eine Multiplikation durch $Q_1\cdot Q_2(f)= = Q_1(f)\cdot Q_2(f)$, so wird $c\,G$ zu einer topologischen Gruppe. Diese Gruppe heißt das Chu-Quasi-Dual von G. Des weiteren erhält man einen Homomorphismus $w\colon G\to c\,G$ durch $w(x)(f)=f(x)$. Man sagt, daß G der Chu-Dualität genügt, wenn w ein Isomorphismus topologischer Gruppen ist.

Eine Realisierung der Bohrkompaktifizierung von G kann man auf die folgende Weise erhalten: Man versehe $\mathrm{Rep}(G)$ mit der diskreten Topologie. Die Menge aller $Q\colon\mathrm{Rep}(G)\to\mathfrak{U}$ mit den Eigenschaften (1)—(4) wird dann wie oben zu einer Gruppe; versieht man diese mit der kompakt-offenen (= endlich-offenen) Topologie, so wird diese Gruppe zu einer kompakten Gruppe $b\,G$. Die Inklusion $m\colon c\,G\to b\,G$ ist ein Homomorphismus, und das Kompositum $r:=mw\colon G\to b\,G$ ist eine Bohrkompaktifizierung von G. Insbesondere ist jede Gruppe, die der Chu-Dualität genügt, eine

[MAP]-Gruppe. Die Konstruktion von CHU verhält sich vernünftig gegen Morphismen. Es gilt das folgende Lemma, dessen einfachen Beweis wir auslassen.

(4.1) Lemma. *Seien* G_1 *und* G_2 *lokalkompakte Gruppen,* φ: $G_1 \to G_2$ *sei ein Homomorphismus. Es sei* $c\varphi: c\,G_1 \to c\,G_2$ *(und analog* $b\varphi: b\,G_1 \to b\,G_2$*) definiert durch* $(c\varphi)(Q)(f) = Q(f \circ \varphi)$ *für* $Q \in c\,G_1$ *(bzw.* $Q \in b\,G_1$*) und* $f \in \mathrm{Rep}(G_2)$. *Dann sind* $c\varphi$ *und* $b\varphi$ *Homomorphismen topologischer Gruppen. Sind ferner* $w_i: G_i \to c\,G_i$ *und* $m_i: c\,G_i \to b\,G_i$ *für* $i = 1, 2$ *die oben konstruierten Homomorphismen, so ist das Diagramm*

$$\begin{tikzcd}
G_1 \arrow[r, "w_1"] \arrow[d, "\varphi"'] \arrow[rr, bend left, "r_1"] & cG_1 \arrow[r, "m_1"] \arrow[d, "c\varphi"'] & bG_1 \arrow[d, "b\varphi"'] \\
G_2 \arrow[r, "w_2"] \arrow[rr, bend right, "r_2"'] & cG_2 \arrow[r, "m_2"] & bG_2
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Nun wollen wir das angekündigte Kriterium beweisen.

(4.2) Satz. *Die lokalkompakte Gruppe* G *genüge der Chu-Dualität. Es sei* H *eine abgeschlossene Untergruppe und* $r: G \to b\,G$ *eine Bohrkompaktifizierung von* G. *Ist* $H = r^{-1}(r(H)^-)$ *und ist die Einschränkung* $r_H: H \to r(H)^-$ *eine Bohrkompaktifizierung von* H, *so genügt auch* H *der Chu-Dualität.*

Insbesondere besagt der Satz: Ist G eine Gruppe in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, die der Chu-Dualität genügt, so genügt jede abgeschlossene Untergruppe von G der Chu-Dualität.

Beweis. Mit φ sei der Inklusionshomomorphismus von H in G bezeichnet. Nach (4.1) ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "w_H"] \arrow[d, "\varphi"'] & cH \arrow[r, "m_H"] \arrow[d, "c\varphi"'] & bH \arrow[d, "b\varphi"'] \\
G \arrow[r, "w_G"] & cG \arrow[r, "m_G"] & bG
\end{tikzcd}$$

kommutativ.

Das Kompositum $r := m_G w_G$ ist eine Bohrkompaktifizierung von G. Nach Voraussetzung ist w_G ein Isomorphismus. Daß die Einschränkung r_H eine Bohrkompaktifizierung von H ist, besagt gerade, daß $b\varphi$ injektiv ist (vgl. (2.3)). Aus der Kommutativität des Diagramms folgt sofort, daß w_H injektiv ist. Wir zeigen nun, daß w_H auch surjektiv ist. Sei dazu $Q \in cH$ vorgelegt. Dann liegt $c\varphi(Q)$ in $c\,G$, und nach Voraussetzung über w_G gibt es ein eindeutig bestimmtes $y \in G$ mit $w_G(y) = c\varphi(Q)$. Man erhält $r(y) = m_G w_G(y) = m_G c\varphi(Q) = b\varphi(m_H(Q))$.

Also liegt $r(y)$ in $b\varphi(bH)$, letztere Gruppe stimmt aber mit $r(H)^-$ überein (dieses folgt allein aus der Tatsache, daß $m_H w_H$ als Bohrkompaktifizierung von H eine dichte Abbildung ist). Wegen $H = r^{-1}(r(H)^-)$ liegt dann y sogar schon in H. Um nun $Q = w_H(y)$ nachzuweisen, genügt es, die Gleichung $b\varphi m_H(Q) = b\varphi m_H w_H(y)$ zu zeigen, da $b\varphi m_H$ injektiv ist. Letztere Gleichung ist äquivalent zu $m_G c\varphi(Q) = m_G w_G(y)$, dieses ist aber wegen $c\varphi(Q) = w_G(y)$ richtig.

Damit ist w_H stetig und bijektiv. Daß w_H auch offen ist, folgt unmittelbar aus dem folgenden einfachen topologischen Lemma, welches wir ohne Beweis formulieren.

(4.3) Lemma. *Seien X, Y, Z und W topologische Räume, X sei ein Unterraum von Z. Ferner seien $h\colon Z \to W$ ein Homöomorphismus, $f\colon Y \to W$ eine stetige Abbildung und $g\colon X \to Y$ eine stetige, bijektive Abbildung, und das Diagramm*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "g"] \arrow[d, hook] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "h"] & W \end{tikzcd}$$

sei kommutativ.

Dann ist g ein Homöomorphismus.

§ 5 Wann kann man aus $G/G_0 \in \mathfrak{A}(\mathfrak{D})$ schließen, daß G in $\mathfrak{A}(\mathfrak{D})$ liegt?

In diesem Paragraphen wollen wir die Frage untersuchen, unter welchen Voraussetzungen man schließen kann, daß G in $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{D}$ bzw. in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ liegt, wenn G/G_0 in $\mathfrak{A}$ bzw. in $\mathfrak{D}$ bzw. in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ liegt. Eine gewisse Antwort geben die beiden folgenden Sätze, die wir in diesem Paragraphen beweisen wollen.

(5.1) Satz. *Sei G eine* [MAP]-*Gruppe mit Bohrkompaktifizierung $r\colon G \to b\,G$. Die Einschränkung (und Coeinschränkung) $r_0\colon G_0 \to r(G_0)^-$*

von r sei eine Bohrkompaktifizierung von G_0. Liegt dann G/G_0 in $\mathfrak{D}$, so liegt auch G in $\mathfrak{D}$.

(5.2) Satz. *Voraussetzungen von G wie in (5.1). Liegt G/G_0 in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, so liegt auch G in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$.*

Die Beweise für (5.1) und (5.2) verlaufen folgendermaßen: Wir beweisen die Sätze zunächst für einen Spezialfall und führen dann den allgemeinen Fall mit ähnlichen Überlegungen wie beim Beweis zu Proposition 4 in [3] auf den Spezialfall zurück, wobei wir einige Ergebnisse aus § 2 verwenden.

Beweis von (5.1). Zusätzlich zu den von den G geforderten Eigenschaften gelte noch, daß G_0 zentral in G und daß G_0 (als topologische Gruppe) isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ ist.

Sei nun H eine abgeschlossene Untergruppe von G. Wir haben zu zeigen, daß die Einschränkung $r_H: H \to r(H)^-$ eine Bohrkompaktifizierung von H ist. Dazu sei L der Abschluß der Untergruppe HG_0 von G. Um zunächst einmal nachzuweisen, daß die Einschränkung $r_L: L \to r(L)^-$ von r auf L eine Bohrkompaktifizierung von L ist, wenden wir (2.8) an auf $M = G$, $U = L$ und $N = G_0$. Nach Voraussetzung ist $r_N: N \to r(N)^-$ eine Bohrkompaktifizierung von $N = G_0 = L_0$. Es bleibt zu zeigen, daß der induzierte Homomorphismus $r^*: L/L_0 \to r(L)^-/r(L_0)^-$ eine Bohrkompaktifizierung von L/L_0 ist. Nun ist der eindeutig existierende Homomorphismus $\hat{r}$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[d] & bG \arrow[d] \\ G/G_0 \arrow[r, "\hat{r}"] & bG/r(G_0)^- \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt, eine Bohrkompaktifizierung von G/G_0. Da G/G_0 nach Voraussetzung in $\mathfrak{D}$ liegt, ist die Einschränkung $f: L/G_0 = L/L_0 \to \hat{r}(L/L_0)^-$ von $\hat{r}$ eine Bohrkompaktifizierung von L/L_0. Wie man sich leicht überlegt, induziert der Quotientenhomomorphismus $b\,G \to b\,G/r(G_0)^-$ durch Einschränkung auf $r(L)^-$ und Ausfaktorisieren von $r(G_0)^-$ einen Isomorphismus i: $r(L)^-/r(G_0)^- \to \hat{r}(L/L_0)^-$ mit $ir^* = f$; mit f ist dann auch r^* eine Bohrkompaktifizierung von L/L_0. Um nachzuweisen, daß r_H eine Bohrkompaktifizierung von H ist, genügt es somit zu zeigen, daß die Einschränkung einer Bohrkompaktifizierung von L auf H eine

Bohrkompaktifizierung von H ist. Ferner hat L die in (5.1) von G geforderten Eigenschaften, L/L_0 liegt nach (2.5) als abgeschlossene Untergruppe von G/G_0 in $\mathfrak{D}$. Wir können also im folgenden o. B. d. A. annehmen, daß $L = G$, d. h. $G = (H\,G_0)^-$ ist. Für den Nachweis, daß r_H eine Bohrkompaktifizierung von H ist, wenden wir wiederum (2.8) an, und zwar auf $M = G$, $U = H$ und $N = H \cap G_0$. Da $r_0\colon G_0 \to r(G_0)^-$ eine Bohrkompaktifizierung von G_0 ist und G_0 als lokalkompakte abelsche Gruppe in $\mathfrak{D}$ liegt, ist die Einschränkung von r_0 auf N (= Einschränkung von r auf N) eine Bohrkompaktifizierung von N. Es genügt somit zu beweisen, daß der induzierte Homomorphismus $H/G_0 \cap H \to r(H)^-/r(G_0 \cap H)^-$ eine Bohrkompaktifizierung von $H/G_0 \cap H$ ist. Dazu reicht es offenbar aus zu zeigen, daß es zu jeder irreduziblen Darstellung $\varphi\colon H \to U(V)$ von H in dem endlichdimensionalen komplexen Hilbertraum V mit Kern $\varphi \supset G_0 \cap H$ eine stetige Darstellung $\hat{\varphi}\colon G \to U(V)$ mit $\hat{\varphi}|H = \varphi$ gibt. Sei also ein φ mit den obigen Eigenschaften vorgelegt. Dann gilt:

(α) Zu φ existiert eine endliche Teilmenge $E = \{h_1, \ldots, h_n\}$ von H derart, daß der Zentralisator von $\varphi(E)$ in $U(V)$ gerade das Zentrum von $U(V)$ ist; denn:

Sei R die C-lineare Hülle von $\varphi(H)$ in $\mathrm{End}(V)$, dem Endomorphismenring von V. R ist dann ein Unterring von $\mathrm{End}(V)$. Wegen der Irreduzibilität von φ sind die Vielfachen der Identität die einzigen Endomorphismen, die mit allen Elementen aus R vertauschbar sind. Wählt man dann E derart, daß $\varphi(E)$ eine Basis von R ist, so bilden die Vielfachen der Identität, die in $U(V)$ liegen (das ist gerade das Zentrum von $U(V)$), den Zentralisator von $\varphi(E)$ in $U(V)$.

Da es einen injektiven Homomorphismus von $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ in $U(V)$ gibt, hat mit $U(V)$ auch $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ keine kleinen Untergruppen; daher ist $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ eine Liesche Gruppe (vgl. [9] in dem hier vorliegenden totalunzusammenhängenden Fall kann man dieses freilich auch daraus erhalten, daß nach dem Theorem auf p. 54 in [4] jede Umgebung des Einselementes in $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ eine offene kompakte Untergruppe enthält). $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ ist totalunzusammenhängend, da $G_0 \cap H$ in $\mathrm{Kern}\,\varphi$ enthalten ist. Zusammen ergibt sich, daß $H/\mathrm{Kern}\,\varphi$ diskret und mithin $\mathrm{Kern}\,\varphi$ offen in H ist. Da H abgeschlossen und G_0 zentral in G ist, ist H wegen $G = (H\,G_0)^-$ normal in G. Wir betrachten nun die durch $(g,h) \mapsto [g,h] := ghg^{-1}h^{-1}$ definierte stetige Abbildung von $G \times H$ in H. Weil $\mathrm{Kern}\,\varphi$ offen in H ist, gibt es für $i = 1, \ldots, n$ eine offene Einsumgebung T_i in G

mit $[T_i,h_i]\subset \operatorname{Kern}\varphi$. Setzt man dann $T=\bigcap_{i=1}^{n} T_i$, so gilt $[T,h_i]\subset$ $\subset \operatorname{Kern}\varphi$ für alle i. Wegen der Zentralität von G_0 gilt sogar $[T\,G_0,h_i]\subset \operatorname{Kern}\varphi$ für alle i. Nach dem Theorem auf p. 54 in [4] gibt es eine offene Untergruppe U von G mit $G_0\subset U\subset T\,G_0$; dann ist $[U,h_i]$ für $i=1,\dots,n$ in Kern φ enthalten. Ferner gelten:

(β) $\varphi(U\cap H)$ ist im Zentrum von $U(V)$ enthalten.

(γ) $U=\overline{(U\cap H)\,G_0}$.

(δ) $\overline{(U\cap H)'}=\overline{U'}$.

Zu (β): Sei $u\in U\cap H$. Nach (α) genügt es zu zeigen, daß $\varphi(u)$ mit $\varphi(h_i)$ für $i=1,\dots,n$ vertauschbar ist. Nun liegt aber $uh_iu^{-1}h_i^{-1}$ im Kern von φ, es gilt also $\varphi(uh_iu^{-1}h_i^{-1})=1_V$, woraus sich die Behauptung sofort ergibt.

Zu (γ): Offenbar ist $(U\cap H)\,G_0$ in U enthalten. Da U als offene Untergruppe auch abgeschlossen ist, gilt $\overline{(U\cap H)\,G_0}\subset\overline{U}=U$, womit die eine Inklusion bewiesen ist. Seien nun $u\in U$ und eine offene Umgebung W von u in G vorgelegt. Wir haben zu zeigen, daß $W\cap(U\cap H)\,G_0$ nicht leer ist. O. B. d. A. können wir annehmen, daß W in U enthalten ist. Wegen $G=(HG_0)^-$ gibt es $h\in H$ und $g\in G_0$ mit $hg\in W$. Da g und W in U enthalten sind, liegt h in U und somit in $H\cap U$. Also ist hg ein Element von $(U\cap H)\,G_0$, und der Durchschnitt von W mit $(U\cap H)\,G_0$ ist mithin nicht leer.

Zu (δ): Offenbar ist $\overline{(U\cap H)'}$ in $\overline{U'}$ enthalten. Da H normal in G ist, ist $U\cap H$ und dann auch $\overline{(U\cap H)'}$ normal in U. Die Einbettung von $(U\cap H)\,G_0$ in U ist nach (γ) dicht und induziert einen injektiven, stetigen, dichten Homomorphismus von $(U\cap H)\,G_0/$ $/\overline{(U\cap H)'}\cap(U\cap H)\,G_0$ in $U/\overline{(U\cap H)'}$. Nun ist aber die Kommutatorgruppe von $(U\cap H)\,G_0$ wegen der Zentralität von G_0 gleich $(U\cap H)'$ und daher in $\overline{(U\cap H)'}\cap(U\cap H)\,G_0$ enthalten. Also ist $(U\cap H)\,G_0/\overline{(U\cap H)'}\cap(U\cap H)\,G_0$ und dann auch $U/\overline{(U\cap H)'}$ abelsch; folglich liegt $\overline{U'}$ in $\overline{(U\cap H)'}$.

Wir sind nun in der Lage, eine stetige Fortsetzung $\bar{\varphi}$ von $\varphi\colon H\to U(V)$ auf G zu konstruieren, womit dann der Beweis für (5.1) im Spezialfall erbracht sein wird. Die Einbettung i von $U\cap H$ in U induziert nach (δ) eine abgeschlossene Einbettung i^* von $(U\cap H)/\overline{(U\cap H)'}$ in die lokalkompakte abelsche Gruppe $U/\overline{U'}$. Da $\varphi(U\cap H)$ nach (β) im Zentrum $Z\,U(V)$ von $U(V)$ liegt, wird

$\overline{(U \cap H)'}$ unter φ auf die Identität in $U(V)$ abgebildet; φ induziert also einen stetigen Homomorphismus φ^* von $U \cap H/\overline{(U \cap H)'}$ in $U(V)$ mit $\operatorname{Bild} \varphi^* \subset ZU(V)$. Da nun i^* eine abgeschlossene Einbettung und $ZU(V)$ zur Gruppe der komplexen Zahlen vom Betrage 1 isomorph ist, gibt es nach Satz 55 aus [7], S. 50, einen Homomorphismus ψ^* von $U/\overline{U'}$ in $U(V)$ mit $\operatorname{Bild} \psi^* \subset ZU(V)$ und $\psi^* i^* = \varphi^*$. In anderer Sprechweise, das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
U \cap H \arrow[rrr, "i"] \arrow[dr] \arrow[dd, "\varphi|_{U \cap H}"'] & & & U \arrow[dl] \arrow[dd, "\psi"] \\
& U \cap H/\overline{(U \cap H)'} \arrow[r, "i^*"] \arrow[dl, "\varphi^*"] & U/\overline{U'} \arrow[dr, "\psi^*"] & \\
U(V) \arrow[rrr, "id"] & & & U(V)
\end{tikzcd}$$

ist kommutativ, wobei mit ψ das Kompositum aus ψ^* und dem Quotientenhomomorphismus $U \to U/\overline{U'}$ bezeichnet ist.

Wegen $G_0 \subset U$ und $G = (HG_0)^-$ gilt $G = (HU)^-$; mit U ist auch HU offen und daher abgeschlossen (HU ist eine Untergruppe, da H normal in G ist) in G, also ist $G = HU$.

Wir definieren nun $\hat{\varphi}\colon G \to U(V)$ durch $\hat{\varphi}(hu) = \varphi(h)\psi(u)$ für $h \in H$ und $u \in U$. Es bleibt dreierlei zu zeigen:

(1) $\hat{\varphi}$ ist wohldefiniert,

(2) $\hat{\varphi}$ ist stetig,

(3) $\hat{\varphi}$ ist homomorph.

Zu (1): Sei $h_1 u_1 = h_2 u_2$ mit $h_i \in H$ und $u_i \in U$. Dann liegt $h_2^{-1} h_1 = u_2 u_1^{-1}$ in $H \cap U$. Es gilt daher $\varphi(h_2^{-1} h_1) = \psi(u_2 u_1^{-1})$, mithin $\varphi(h_2)^{-1} \varphi(h_1) = \psi(u_2) \psi(u_1)^{-1}$ und folglich $\hat{\varphi}(h_1 u_1) = \varphi(h_1) \psi(u_1) = \varphi(h_2) \psi(u_2) = \hat{\varphi}(h_2 u_2)$.

Zu (2): ist klar, da ψ stetig und U offen ist.

Zu (3): Wegen $G = (HG_0)^-$ und der Stetigkeit von $\hat{\varphi}$ genügt es zu zeigen, daß die Einschränkung von $\hat{\varphi}$ auf die Untergruppe HG_0 homomorph ist. Seien also $x_1 = h_1 g_1$ und $x_2 = h_2 g_2$ mit $h_i \in H$ und $g_i \in G_0$. Dann ist $\hat{\varphi}(x_1 x_2) = \hat{\varphi}(h_1 h_2 g_1 g_2)$, da G_0 zentral in G ist, und $\hat{\varphi}(h_1 h_2 g_1 g_2) = \varphi(h_1 h_2) \psi(g_1 g_2) = \varphi(h_1) \varphi(h_2) \psi(g_1) \psi(g_2) = \varphi(h_1) \psi(g_1) \varphi(h_2) \psi(g_2)$, da $\operatorname{Bild} \psi$ im Zentrum von $U(V)$ liegt. Also gilt $\hat{\varphi}(x_1 x_2) = \varphi(h_1) \psi(g_1) \varphi(h_2) \psi(g_2) = \hat{\varphi}(h_1 g_1) \hat{\varphi}(h_2 g_2) = \hat{\varphi}(x_1) \hat{\varphi}(x_2)$.

Damit ist (5.1) im Spezialfall bewiesen. Wir wenden uns nun dem allgemeinen Fall zu. Mit G ist auch G_0 eine [MAP]-Gruppe. Nach dem Satz von FREUDENTHAL und WEIL (als (A) in (3.4) formuliert) enthält G_0 eine kompakte normale Untergruppe K mit der Eigenschaft, daß G_0/K zu einem $\mathbb{R}^n$ isomorph ist. Da $\mathbb{R}^n$ außer der trivialen Untergruppe keine kompakte Untergruppe besitzt, ist K die größte kompakte Untergruppe von G_0. Mit G_0 ist dann auch K invariant unter allen Automorphismen von G, insbesondere ist K normal in G. Um nachzuweisen, daß G in $\mathfrak{D}$ liegt, genügt es nach (2.13) zu zeigen, daß $M := G/K$ in $\mathfrak{D}$ liegt. Ferner hat M die in (5.1) von G geforderten Eigenschaften, denn:
G/G_0 ist isomorph zu $(G/K)/(G_0/K) = M/(G_0/K)$; also ist $M_0 = G_0/K$, und mit G/G_0 liegt auch M/M_0 in $\mathfrak{D}$. Der eindeutig existierende stetige Homomorphismus $\hat{r}$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[d] & bG \arrow[d] \\ M \arrow[r, "\hat{r}"] & bG/r(K) \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt, ist eine Bohrkompaktifizierung von M. Mit r ist auch $\hat{r}$ injektiv, M ist also eine [MAP]-Gruppe.

Es bleibt zu zeigen, daß die Einschränkung $\hat{r}_0 : M_0 \to \hat{r}(M_0)^-$ von $\hat{r}$ auf M_0 eine Bohrkompaktifizierung von M_0 ist. Nun ist aber $\hat{r}(M_0)^-$ nichts anderes als $r(G_0)^-/r(K)$, und $\hat{r}_0$ ist der von $r_0 : G_0 \to r(G_0)^-$ durch Ausfaktorisieren von K bzw. $r(K)$ induzierte Homomorphismus. Da r_0 nach Voraussetzung eine Bohrkompaktifizierung von M_0 ist, ist dann $\hat{r}_0$ eine Bohrkompaktifizierung von M_0. Wir können also o. B. d. A. annehmen, daß $M = G$, das heißt daß G_0 isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ ist. Es sei C der Zentralisator von G_0 in G. Nach Theorem 4 aus [8] (als (B) in (3.4) formuliert) ist C ein Normalteiler von endlichem Index in G. C erfüllt die in (5.1) von G geforderten Voraussetzungen, denn:
C/C_0 liegt als abgeschlossene Untergruppe von G/G_0 nach (2.5) in $\mathfrak{D}$. Die Einschränkung $C \to r(C)^-$ von r auf C ist nach (2.9) eine Bohrkompaktifizierung von C. Da $r_0 : G_0 \to r(G_0)^-$ nach Voraussetzung eine Bohrkompaktifizierung von G_0 ist, ist die Einschränkung einer Bohrkompaktifizierung von C auf C_0 eine Bohrkompaktifizierung von C_0. Des weiteren ist C offenbar eine [MAP]-Gruppe.

Ferner ist $C_0 = G_0 (\cong \mathbb{R}^n)$ zentral in C. Auf Grund des bereits abgehandelten Spezialfalles ist dann C in $\mathfrak{D}$ und nach (2.12) liegt G als endliche Erweiterung einer Gruppe aus $\mathfrak{D}$ ebenfalls in $\mathfrak{D}$.

Beweis von (5.2). Nach (5.1) liegt G in $\mathfrak{D}$. Es bleibt daher zu zeigen, daß G in $\mathfrak{A}$ liegt. Wir untersuchen zunächst wiederum den Spezialfall, daß G_0 zentral in G ist. Sei nun H eine abgeschlossene Untergruppe von G, $r\colon G \to b\,G$ sei eine Bohrkompaktifizierung von G. Wir haben zu beweisen, daß $r^{-1}(r(H)^-) = H$ ist. Wie beim Beweis von (5.1) sei $L = (H\,G_0)^-$. Dann gilt zunächst $r^{-1}(r(L)^-) \subset L$, denn: Bezeichnen $\nu\colon G \to G/G_0$ und $\mu\colon b\,G \to b\,G/r(G_0)^-$ die Quotientenhomomorphismen, so ist der eindeutig existierende Homomorphismus $\hat{r}$, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[d, "\nu"'] & bG \arrow[d, "\mu"] \\ G/G_0 \arrow[r, "\hat{r}"] & bG/r(G_0)^- \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt, eine Bohrkompaktifizierung von G/G_0. Da $\nu(L) = L/G_0$ eine abgeschlossene Untergruppe von G/G_0 ist, gilt $\hat{r}^{-1}(\hat{r}\nu(L)^-) = \nu(L)$ nach Voraussetzung und nach Definition der Klasse $\mathfrak{A}$. Ferner gilt $r(L) \subset \mu^{-1}(\hat{r}\nu(L)) \subset \mu^{-1}(\hat{r}\nu(L)^-)$; folglich ist $r(L)^-$ in $\mu^{-1}(\hat{r}\nu(L)^-)$ enthalten. Daraus ergibt sich $r^{-1}(r(L)^-) \subset$ $\subset r^{-1}(\mu^{-1}(\hat{r}\nu(L)^-)) = \nu^{-1}(\hat{r}^{-1}(\hat{r}\nu(L)^-)) = \nu^{-1}(\nu(L)) = L$.

Da G in $\mathfrak{D}$ liegt, ist die Einschränkung $r_L\colon L \to r(L)^-$ von r auf L eine Bohrkompaktifizierung von L. Mit $r^{-1}(r(L)^-)$ ist trivialerweise auch $r^{-1}(r(H)^-)$ in L enthalten; daher gilt $r_L^{-1}(r_L(H)^-) =$ $= r^{-1}(r(H)^-)$, und unsere Behauptung ist äquivalent zu $H =$ $= r_L^{-1}(r_L(H)^-)$. Ferner erfüllt L die in (5.2) von G geforderten Voraussetzungen. O. B. d. A. können wir daher annehmen, daß $G = L$, d. h. daß $G = (H\,G_0)^-$ ist. Wegen der Zentralität von G_0 ist dann H ein abgeschlossener Normalteiler in G. Des weiteren ist das Kompositum aus der Einbettung $G_0 \to G$ und dem Quotientenhomomorphismus $G \to G/H$ ein dichter Homomorphismus, und mit G_0 ist auch G/H eine abelsche Gruppe. Als lokalkompakte abelsche Gruppe ist G/H aber maximal fastperiodisch. Der durch r induzierte Homomorphismus $G/H \to b\,G/r(H)^-$ ist eine Bohrkompaktifizierung von G/H und mithin injektiv, was aber gerade nichts anderes als $H = r^{-1}(r(H)^-)$ bedeutet.

Damit ist (5.2) für den Spezialfall bewiesen, und wir wenden uns dem allgemeinen Fall zu. Sei wiederum K die größte kompakte Untergruppe von G_0 und $M := G/K$. Nach (2.14) genügt es zu zeigen, daß M in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ liegt. M besitzt die in (5.2) von G verlangten Eigenschaften. Mit Ausnahme der Forderung, daß M/M_0 in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ liegt, haben wir diese Eigenschaften beim Beweis von (5.1) nachgeprüft. M/M_0 liegt aber in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$, da G/G_0 diese Eigenschaft besitzt und M/M_0 zu G/G_0 isomorph ist. O. B. d. A. können wir also wiederum annehmen, daß $M = G$, das heißt daß G_0 isomorph zu einem $\mathbb{R}^n$ ist. Es sei wieder C der Zentralisator von G_0 in G. Mit G/G_0 liegt auch C/C_0 als abgeschlossene Untergruppe von G/G_0 in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$. C erfüllt auch die übrigen Voraussetzungen von (5.2), denn G liegt nach (5.1) in $\mathfrak{D}$, die Einschränkung $r_C \colon C \to r(C)^-$ ist folglich eine Bohrkompaktifizierung von C, und damit ist die Einschränkung einer Bohrkompaktifizierung von C auf $C_0 = G_0$ eine Bohrkompaktifizierung von C_0. Ferner ist C_0 zentral in C, und auf Grund des bereits abgehandelten Spezialfalles liegt C in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$. Verwendet man dann, daß C nach (B) aus (3.4) von endlichem Index in G ist, so ergibt sich mit (2.12), daß G in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ liegt.

Damit ist (5.2) vollständig bewiesen.

§ 6 Das Chu-Quasi-Dual der Heisenberg-Gruppe mit ganzzahligen Eintragungen

In diesem Paragraphen zeigen wir zunächst, daß $\mathfrak{A}$ nicht in $\mathfrak{D}$ enthalten ist. Die Gruppe $H_3(\mathbb{Z}) := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x & z \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| x, y, z \in \mathbb{Z} \right\}$, versehen mit der diskreten Topologie, liegt nämlich in $\mathfrak{A}$, aber nicht in $\mathfrak{D}$. Daraus ergibt sich dann mit Hilfe eines einfachen Lemmas, daß eine kompakte abelsche Gruppe A derart existiert, daß $H_3(\mathbb{Z}) \times A$ nicht in $\mathfrak{A}$ liegt. Die (2.13) und (2.14) entsprechenden Sätze für die Klasse $\mathfrak{A}$ sind also falsch. Zum Abschluß zeigen wir dann noch, daß $H_3(\mathbb{Z})$ nicht der Chu-Dualität genügt. Der Satz von Chu (vgl. [1]), wonach endliche Produkte von Gruppen, die der Chu-Dualität genügen, ebenfalls der Chu-Dualität genügen, kann also nicht auf semidirekte Produkte ($H_3(\mathbb{Z})$ ist ein semidirektes Produkt zweier abelscher Gruppen) verallgemeinert werden, auch nicht dann, wenn das semidirekte Produkt eine [MAP]-Gruppe ist. Das Chu-Quasi-Dual $cH_3(\mathbb{Z})$ kann man explizit angeben.

Die Struktur von $H_3(\mathbb{Z})$ ist recht einfach. Für die Matrix $\begin{pmatrix}1 & x & z\\ 0 & 1 & y\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ in $H_3(\mathbb{Z})$ schreiben wir auch kurz $[x,y,z]$. $H_3(\mathbb{Z})$ ist das semidirekte Produkt NV aus dem Normalteiler N: $\{[0,y,z]\,|\,y,z\in \in\mathbb{Z}\}\cong\mathbb{Z}^2$ und der Untergruppe $V:=\{[x,0,0]\,|\,x\in\mathbb{Z}\}\cong\mathbb{Z}$. Der definierende Homomorphismus $s\colon V\to\mathrm{Aut}(N)\cong\mathrm{Aut}(\mathbb{Z}^2)=GL(2,\mathbb{Z})$ ist gegeben durch $s([x,0,0])=\begin{pmatrix}1 & 0\\ x & 1\end{pmatrix}$. Man rechnet leicht nach, daß $Z(H_3(\mathbb{Z}))=H_3(\mathbb{Z})'=\{[0,0,z,]\,|\,z\in\mathbb{Z}\}$ ist. H_3 ist nilpotent von der Klasse 2. $H_3(\mathbb{Z})$ liegt nicht in $\mathfrak{D}$, wie man mit Hilfe von (3.13) und (F) aus (3.4) nachweisen kann. Genauer ergibt sich aus dem einfachen Lemma (3.6):

(6.1) Die (abgeschlossene) Untergruppe $H_3(\mathbb{Z})'$ von $H_3(\mathbb{Z})$ erfüllt nicht die äquivalenten Bedingungen (1)—(4) von (2.3).

Beweis. Da $H_3(\mathbb{Z})'$ zentral in $H_3(\mathbb{Z})$ ist, impliziert (3.6), daß (4) aus (2.3) für eine treue eindimensionale Darstellung φ von $H_3(\mathbb{Z})'$ nicht erfüllt ist.

(6.2) $H_3(\mathbb{Z})$ liegt in $\mathfrak{A}$.

Beweis. Zur Abkürzung setzen wir in diesem Beweis $G=H_3(\mathbb{Z})$. Offenbar gilt:

(1) Ist a eine positive natürliche Zahl, so ist

$$N_a := \{[ax, ay, az]\,|\,x,y,z\in\mathbb{Z}\}$$

ein Normalteiler von endlichem Index in G.

Ferner ist $G/N_a\cap G'$ isomorph zu einer (abgeschlossenen) Untergruppe von $G/N_a\times G/G'$, letztere Gruppe liegt als endliche Erweiterung einer abelschen Gruppe nach (2.12) in $\mathfrak{A}$. Also giltnach (2.5):

(2) Ist a eine positive natürliche Zahl, so liegt $G/N_a\cap G'$ in $\mathfrak{A}$.

Zum Nachweis, daß G in $\mathfrak{A}$ liegt, wollen wir nun Kriterium (4) von (2.1) verwenden. Seien dazu U eine Untergruppe von G und g ein Element aus $G\setminus U$. Wir haben die Existenz zweier Homomorphismen φ_1 und φ_2 von G in eine kompakte Gruppe nachzuweisen, die auf U übereinstimmen, an der Stelle g aber verschiedene Werte annehmen. Offensichtlich genügt es dazu, einen Homomorphismus ψ von G in eine diskrete Gruppe aus $\mathfrak{A}$ mit $\psi(g)\notin\psi(U)$ anzugeben.

Falls g nicht in UG' liegt, hat der natürliche Homomorphismus $\psi\colon G\to G/G'$ die gewünschte Eigenschaft. Nehmen wir nun an, daß g in UG' liegt. Dann ist g von der Form ug' mit gewissen $u\in U$

und $g' \in G'$, $g' = u^{-1}g$ liegt in $G' \setminus U$. Wenn es gelingt, einen Homomorphismus ψ in eine diskrete Gruppe aus $\mathfrak{A}$ mit $\psi(g') \notin \psi(U)$ zu konstruieren, so ist auch $\psi(g)$ kein Element von $\psi(U)$. Daher können wir o. B. d. A. annehmen, daß schon g in $G' \setminus U$ liegt. Da G' isomorph zu $\mathbb{Z}$ ist, ist $G' \cap U$ eine zyklische Gruppe; $[0, 0, z]$ mit nichtnegativem ganzem z sei ein erzeugendes Element von $G' \cap U$. Wir unterscheiden die beiden Fälle $z = 0$ und $z > 0$.

(a) $z = 0$, das heißt $G' \cap U$ ist trivial. Es sei $g = [0, 0, x]$; setze dann $a := |x| + 1$ und wähle für ψ den natürlichen Homomorphismus $G \to G/N_a \cap G'$ — letztere Gruppe liegt nach (2) in $\mathfrak{A}$. Läge nun $\psi(g)$ in $\psi(U)$, so läge g in $U \cdot (N_a \cap G')$, etwa $g = uh$ mit $u \in U$ und $h \in N_a \cap G'$. Dann ist $u = gh^{-1}$ in $U \cap G'$, also gilt $g = h \in N_a \cap G'$; das ist aber unmöglich, da x nicht von a geteilt wird.

(b) $z > 0$. Dann ist $U \cap G' = N_z \cap G'$. $G/U \cap G'$ liegt nach (2) in $\mathfrak{A}$. Offenbar hat der natürliche Homomorphismus $\psi\colon G \to G/U \cap G'$ die gewünschte Eigenschaft. Damit ist (6.2) bewiesen.

Um zu zeigen, daß es eine kompakte abelsche Gruppe A derart gibt, daß $H_3(\mathbb{Z}) \times A$ nicht in $\mathfrak{A}$ liegt, benötigen wir das folgende Lemma.

(6.3) Lemma. *Sei G eine lokalkompakte Gruppe mit Bohrkompaktifizierung $r\colon G \to bG$. Ferner sei H eine abgeschlossene Untergruppe von G mit der Eigenschaft, daß die Einschränkung $H \to r(H)^-$ von r auf H keine Bohrkompaktifizierung von H ist; mit $s\colon H \to K$ sei eine Bohrkompaktifizierung von H bezeichnet. Es seien $G_1 = G \times K$ und $H_1 = \{(x, s(x)) \in G_1 \mid x \in H\}$. Dann ist H_1 eine abgeschlossene Untergruppe von G_1, $r \times 1_K\colon G_1 \to bG \times K$ ist eine Bohrkompaktifizierung von G_1, und H_1 ist eine echte Untergruppe von $(r \times 1_K)^{-1}((r \times 1_K)(H_1)^-)$.*

Beweis: Die einzige nicht völlig triviale Aussage ist die, daß H_1 echt in $(r \times 1_K)^{-1}((r \times 1_K)(H_1)^-)$ enthalten ist. Bezeichnet $u\colon H \to G$ den Inklusionshomomorphismus, so ist nach (2.3) der eindeutig existierende Homomorphismus bu, welcher das Diagramm

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "s"] \arrow[d, "u"'] & K \arrow[d, "bu"] \\ G \arrow[r, "r"] & bG \end{tikzcd}$$

kommutativ ergänzt, nicht injektiv. Wie man leicht nachrechnet, gilt $(r \times 1_K)(H_1)^- = \{(r(x), s(x)) \in bG \times K \mid x \in H\}^- = \{(bu(x), x) \mid x \in K\}$ und daher $(r \times 1_K)^{-1}((r \times 1_K)(H_1)^-) = \{(y, z) \in G \times K \mid r(y) = bu(z)\}$.

Ist nun z ein vom Einselement verschiedenes Element im Kern von bu und e das Einselement von G, so liegt (e,z) in $(r\times 1_K)^{-1}((r\times 1_K)(H_1)^-)$, aber nicht in H_1, und das Lemma ist bewiesen.

Wählt man nun im Lemma $G=H_3(\mathbb{Z})$ und $H=H_3(\mathbb{Z})'$, so sind die Voraussetzungen nach (6.1) erfüllt. Ist ferner $H_3(\mathbb{Z})'\to A$ eine Bohrkompaktifizierung von $H_3(\mathbb{Z})'\cong\mathbb{Z}$, so ergibt sich mit (6.3):

(6.4) Das Produkt aus $H_3(\mathbb{Z})$ und der kompakten abelschen Gruppe A liegt nicht in $\mathfrak{A}$.

Nun wollen wir das Chu-Quasi-Dual cH_3 von $H_3(\mathbb{Z})$ bestimmen. Wir verwenden die in § 4 eingeführten Bezeichnungen. Zunächst beweisen wir ein einfaches Lemma. Es sei G eine lokalkompakte Gruppe. Die Pontrjaginsche Charaktergruppe $\hat{G}$ von G ist nichts anderes als $\mathrm{Hom}(G,U(1))=\mathrm{Rep}_1(G)$, wie üblich mit der kompakt-offenen Topologie versehen, und kanonisch isomorph zu $(G/\overline{G'})^\wedge$. Ferner sei $H:=\{Q\in cG\mid Q(f)=1 \text{ für alle } f\in\hat{G}=\mathrm{Rep}_1(G)\}$. Wie man leicht sieht, ist H ein $\overline{(cG)'}$ umfassender, abgeschlossener Normalteiler in cG. Seien sodann $\varphi\colon G\to G/\overline{G'}$, $\varphi_1\colon cG\to cG/H$, $\varphi_2\colon cG\to cG/\overline{(cG)'}$ und $q\colon cG/\overline{(cG)'}\to cG/H$ die Quotientenhomomorphismen. Ferner seien $w\colon G\to cG$ und $w'\colon G/\overline{G'}\to c(G/\overline{G'})$ die in § 4 angegebenen natürlichen Homomorphismen; w' ist ein Isomorphismus, da alle abelschen lokalkompakten Gruppen der Chu-Dualität genügen. Nach (4.1) ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"'] & cG \arrow[d, "c\varphi"] \\ G/\overline{G'} \arrow[r, "w'"] & c(G/\overline{G'}) \end{tikzcd}$$

kommutativ.

Da $w(\overline{G'})\subset\overline{(cG)'}\subset H$ gilt, gibt es Homomorphismen $\psi_i\,(i=1,2)$ derart, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"'] & cG \arrow[d, "\varphi_1"] \\ G/\overline{G'} \arrow[r, "\psi_1"] & cG/H \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \arrow[r, "w"] \arrow[d, "\varphi"'] & cG \arrow[d, "\varphi_2"] \\ G/\overline{G'} \arrow[r, "\psi_2"] & cG/\overline{(cG)'} \end{tikzcd}$$

kommutieren. Mit den obigen Bezeichnungen gilt nun:

(6.5) Lemma

1) *$c\varphi$ ist offen,* $\operatorname{Kern} c\varphi = H$;

2) $q\psi_2 = \psi_1$;

3) *ψ_1 ist ein Isomorphismus topologischer Gruppen;*

4) *ψ_2 ist eine Einbettung.*

Beweis. Zu 1): Um zu zeigen, daß $c\varphi$ offen ist, genügt es nachzuweisen, daß es zu jeder offenen Einsumgebung U in cG eine Einsumgebung V in $c(G/\overline{G'})$ mit $c\varphi(U) \supset V$ gibt. Offenbar leistet $V := (w'\varphi)(w^{-1}(U))$ das Gewünschte; V ist offen, weil w stetig, φ offen und w' ein Homöomorphismus ist. Die Gleichung $\operatorname{Kern} c\varphi = H$ folgt unmittelbar aus $\operatorname{Rep}_1(G) = \operatorname{Rep}_1(G/\overline{G'})$, aus der Tatsache, daß jedes Element von $\operatorname{Rep}_n(G/\overline{G'})$ nach Konjugation mit einer geeigneten unitären Matrix als direkte Summe von Elementen aus $\operatorname{Rep}_1(G/\overline{G'})$ geschrieben werden kann und aus (2) und (4) der definierenden Eigenschaften der Elemente aus cG.

Zu 2): trivial.

Zu 3): Wegen 1) gibt es einen Isomorphismus i derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
cG \arrow[r, "c\varphi"] \arrow[d, "\varphi_1"'] & c(G/\overline{G'}) \\
cG/H \arrow[ur, "i"'] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert.

Offensichtlich ist dann $i\psi_1 = w'$, und mit i und w' ist auch ψ_1 ein Isomorphismus.

Zu 4): Wegen 2) und 3) ist $q\psi_2 = \psi_1$ eine Faktorisierung des Isomorphismus ψ_1. Wie man leicht nachweist, faktorisiert ein Isomorphismus in der Kategorie der topologischen Gruppen nur durch eine Einbettung und einen Quotientenhomomorphismus; insbesondere ist ψ_1 eine Einbettung.

Doch nun wollen wir uns wieder der Gruppe $H_3(\mathbb{Z})$ zuwenden, die wir im folgenden mit G bezeichnen. Wie beim Beweis zu (6.2) sei $N_k := \{[kx, ky, kz] \mid x, y, z \in \mathbb{Z}\}$ für natürliche Zahlen k; ferner sei $M_k := N_k \cap G'$. Es gilt:

(6.6) Ist $f \in \operatorname{Rep}_n(G)$, so ist $M_{n!}$ in $\operatorname{Kern} f$ enthalten.

(6.7) Bemerkung (ohne Beweis). Genauer gilt: Bezeichnet $\nu_n \colon G \to G/N_{n!}$ den Quotientenhomomorphismus, so gibt es zu

$f \in \mathrm{Rep}_n(G)$ eine Matrix $U \in U(n)$ und $f_1, \ldots, f_t \in \mathrm{Rep}_1(G)$ sowie $g_1, \ldots, g_t \in \mathrm{Rep}(G/N_{n!})$ mit

$$U f U^{-1} = \bigoplus_{i=1}^{t} f_i \otimes g_i \nu_{n!}.$$

Beweis von (6.6). Sei zunächst f irreduzibel. Dann wende man (3.6) auf die Untergruppe $G' = ZG$ an. Es folgt, daß $x^n \in \mathrm{Kern} f$ für alle $x \in G'$. Also liegt M_n und erst recht $M_{n!}$ in $\mathrm{Kern} f$. Ist f nicht irreduzibel, so ist f äquivalent zu einer direkten Summe irreduzibler Darstellungen $f_1, \ldots, f_t$. Nun haben äquivalente Darstellungen denselben Kern, also gilt $\mathrm{Kern} f = \mathrm{Kern}(f_i \oplus \ldots \oplus f_t) = \bigcap_{i=1}^{t} \mathrm{Kern} f_i$. Nach dem oben Bewiesenen gilt $\mathrm{Kern} f_i \supset M_{n_i!}$, wenn n_i die Dimension von f_i bezeichnet. Da aber $n \geqslant n_i$ ist, gilt $M_{n_i!} \supset M_{n!}$, und (6.6) ist bewiesen.

(6.8) Wie in (6.5) sei $H = \{Q \in c\,G \mid Q(f) = 1 \, (\forall f \in \mathrm{Rep}_1(G))\}$. Nach (6.5) ist $c\,G/H$ isomorph zu G/G', also diskret und isomorph zu $\mathbb{Z}^2$. Insbesondere ist H offen in $c\,G$. Der Homomorphismus $m: c\,G \to b\,G$ (vgl. § 4) induziert durch Einschränkung einen Isomorphismus topologischer Gruppen von H auf $r(G')^-$. Es gilt $H = w(G')^-$, und $w: G \to c\,G$ ist dicht. Die Charaktergruppe der kompakten abelschen Gruppe H ist isomorph zu $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$. Ist $\varphi: \mathbb{Z} \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\wedge$ der duale Homomorphismus zur kanonischen Injektion der (diskreten) Gruppe $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ in die Gruppe T der komplexen Zahlen vom Betrage 1, so wird der Raum $\mathbb{Z}^2 \times (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\wedge$ durch $(x,y,z)(x',y',z') := (x+x', y+y', z+z'+\varphi(xy'))$ zu einer topologischen Gruppe F. Die Abbildung $[x,y,z] \mapsto (x,y,\varphi(z))$ ist ein Homomorphismus ψ von G in F, und es gibt genau einen Isomorphismus h derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "w"] \arrow[dr, "\psi"'] & cG \\ & F \arrow[u, "h"'] \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Beweis. Zunächst zeigen wir, daß $m(H)$ in $r(G')^-$ enthalten ist. Diese Aussage gilt stets. Da r ein dichter Homomorphismus ist, ist $r(G')^- = \overline{(b\,G)'}$. Gäbe es nun ein $Q \in H$ mit $m(Q) \notin \overline{(b\,G)'}$, so fände man dazu ein $f\in\mathrm{Rep}_1(b\,G)$ mit $f(m(Q))\neq 1$; dann wäre aber $Q(fr)=f(m(Q))\neq 1$, was der Definition von H widerspricht, vgl. auch Beweis zu 7. in [6]. Damit induziert m einen injektiven Homomorphismus von H in $r(G')^- = \overline{(b\,G)}'$. Als nächstes zeigen wir, daß dieser Homomorphismus auch surjektiv ist. Sei dazu $Q\in r(G')^-$ vorgelegt. Es ist zu zeigen, daß $Q\colon \mathrm{Rep}(G)\to\mathfrak{U}$ stetig ist.

Für $n\in\mathbb{N}$ seien dazu $\mu_n\colon G\to G/M_{n!}$ und $b\mu_n\colon b\,G\to b\,G/r(M_{n!})^-$ die Quotientenhomomorphismen. Es gibt dann genau einen Homomorphismus r_n derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "r"] \arrow[d] & bG \arrow[d] \\ G/M_{n!} \arrow[r, "r_n"] & bG/r(M_{n!})^- \end{tikzcd}$$

kommutiert.

Ferner ist r_n injektiv, denn es gilt $r^{-1}(r(M_{n!})^-)=M_{n!}$, da G in $\mathfrak{A}$ liegt, und r_n ist eine Bohrkompaktifizierung von $G/M_{n!}$. Die Kommutatorgruppe von $G/M_{n!}$ ist gerade die endliche Gruppe $\mu_n(G')=G'/M_{n!}$. Da r_n dicht und $\mu_n(G')$ endlich ist, ist die topologische Kommutatorgruppe von $b\,G/r(M_{n!})^-$ gleich $r_n\mu_n(G')$; also gilt $(b\mu_n)(\overline{(b\,G)}')=r_n\mu_n(G')$. Insbesondere gibt es zu Q ein $x_n\in G'$ mit $(b\mu_n)(Q)=r_n\mu_n(x_n)=(b\mu_n)r(x_n)$ und daher ein $Q'\in r(M_{n!})^-$ mit $Q=r(x_n)\,Q'$. Nun ist $P(f)=E_n$ (E_n: Einheitsmatrix in $U(n)$) für alle $P\in r(M_{n!})^-$ und alle $f\in\mathrm{Rep}_n(G)$; denn ist f ein Element von $\mathrm{Rep}_n(G)$, so ist durch $P\mapsto P(f)$ ein stetiger Homomorphismus von $b\,G$ in $U(n)$ definiert, nach (6.6) liegt $r(M_{n!})$ und dann auch $r(M_{n!})^-$ im Kern dieses Homomorphismus. Daher gilt also $Q(f)= =f(x_n)$ für alle $f\in\mathrm{Rep}_n(G)$ bzw. $Q|_{\mathrm{Rep}_n(G)}=r(x_n)|_{\mathrm{Rep}_n(G)}$. Insbesondere ist für jedes $n\in\mathbb{N}$ die Einschränkung von Q auf $\mathrm{Rep}_n(G)$ stetig; damit ist Q stetig. Wir haben somit bislang gezeigt, daß m einen stetigen bijektiven Homomorphismus von H auf $\overline{(b\,G)}'$ induziert; als nächstes beweisen wir, daß dieser Homomorphismus auch offen ist. Wegen der Homomorphie von m und nach Definition der Topologie auf $c\,G$ genügt es dazu, zu $\varepsilon>0$ und einer kompakten Teilmenge K von $\mathrm{Rep}(G)$ eine Einsumgebung V in $\overline{(b\,G)}'$ anzugeben mit $V\subset m(\{Q\in H \mid \bigwedge_{n\in\mathbb{N}}\ \bigwedge_{f\in K\cap\mathrm{Rep}_n(G)} \|Q(f)-E_n\|<\varepsilon\})$. Da K kompakt ist, gibt es ein $n\in\mathbb{N}$ derart, daß $K\cap\mathrm{Rep}_k(G)$ für $k>n$ leer ist. Wähle dann $V = \bigcap_{k=1}^{n} r(M_{k!})^- = r(M_{n!})^-$. V hat die gewünschten Eigenschaften, denn für $P \in V$ und $f \in \mathrm{Rep}_k(G)$, $k \leqslant n$, ist nach dem oben Bewiesenen $P(f) = E_k$; ferner ist $\overline{(b\,G)'}/V = (b\,\mu_n)\left(\overline{(b\,G')}\right) = r_n \mu_n(G')$ endlich und mithin V eine offene Untergruppe von $\overline{(b\,G)'}$.

Die Gleichung $w(G')^- = H$ ist wegen der durch m induzierten Isomorphie zwischen H und $r(G')^-$ klar. Dann ist aber w dicht, da w einen Isomorphismus von G/G' auf $c\,G/H$ induziert. Die Homomorphismen $b\,\mu_n$ ergeben durch Einschränkung surjektive Homomorphismen $\lambda_n \colon \overline{(b\,G)'} \to (b\,\mu_n)\left(\overline{(b\,G)'}\right) = r_n \mu_n(G') \cong G'/M_{n!}$. Für $n \geqslant k$ gibt es einen surjektiven Homomorphismus $p_{nk} \colon r_n \mu_n(G') \to r_k \mu_k(G')$ mit $p_{nk} \lambda_n = \lambda_k$. Dann ist $\left(\lambda_n \colon \overline{(b\,G)'} \to r_n \mu_n(G'),\ n \in \mathbb{N}\right)$ der projektive Limes des Systems $\left(p_{nk} \colon r_n \mu_n(G') \to r_k \mu_k(G');\ k, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k\right)$, da alle λ_n surjektiv sind und da $\bigcap_{n \in N} \mathrm{Kern}\, \lambda_n = \bigcap_{n \in N} r(M_{n!})^-$ trivial ist — wie wir oben gesehen haben. Folglich ist die Charaktergruppe von $\overline{(b\,G)'}$ (und damit auch von H) isomorph zum induktiven Limes (in der Kategorie der diskreten abelschen Gruppen) des dualen Systems $\left(p_{nk}^{\wedge} \colon r_k \mu_k(G')^{\wedge} \to r_n \mu_n(G')^{\wedge};\ k, n \in \mathbb{N},\ n \geqslant k\right)$. Nun ist jedes $r_n \mu_n(G')$ eine zyklische Gruppe der Ordnung $n!$ mit einem ausgezeichneten erzeugenden Element $x_n := r_n \mu_n([0,0,1])$, und es gilt $p_{nk}(x_n) = x_k$ für $n \geqslant k$. Sei dann $i_n \colon r_n \mu_n(G')^{\wedge} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ definiert durch $i_n(\chi) = \chi(x_n)$. Man rechnet nach, daß die Diagramme

$$\begin{tikzcd} r_k \mu_k (G')^{\wedge} \arrow[rr, "p_{nk}^{\wedge}"] \arrow[dr, "i_k"'] & & r_n \mu_n (G')^{\wedge} \arrow[dl, "i_n"] \\ & \mathbb{Q}/\mathbb{Z} & \end{tikzcd}$$

für $n \geqslant k$ kommutieren und daß $\left(i_n \colon r_n \mu_n(G')^{\wedge} \to \mathbb{Q}/\mathbb{Z};\ n \in \mathbb{N}\right)$ der induktive Limes der $p_{nk}^{\wedge}$, $n \geqslant k$, ist.

Wir wollen nun den letzten Teil von (6.8) beweisen. Offenbar ist F eine topologische Gruppe, und $\psi \colon G \to F$ ist ein dichter Homomorphismus. Daher kann es höchstens ein h mit $h\psi = w$ geben. Es bleibt noch die Existenz eines solchen h zu zeigen. Mit $\tilde{w} \colon G' \to H$ bzw. $\tilde{\psi} \colon G' \to (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^{\wedge}$ sei die Einschränkung und Coeinschränkung von w bzw. ψ auf G' bezeichnet. Dann gibt es zueinander inverse Isomorphismen f und g derart, daß das Diagramm

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[rr, "\tilde{w}"] \arrow[dr, "\tilde{\psi}"'] & & H \arrow[dl, shift left, "g"] \\
& (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\wedge \arrow[ur, shift left, "f"] &
\end{tikzcd}$$

kommutiert, da das duale Diagramm

$$\begin{tikzcd}
T \cong (G')^\wedge & & \hat{H} \cong \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[ll, tail] \arrow[dl, dashed, shift left] \\
& \mathbb{Q}/\mathbb{Z} \arrow[ul, tail] \arrow[ur, dashed, shift left] &
\end{tikzcd}$$

entsprechende Lösungen zuläßt. Setze dann $h(x,y,z) = = w([x,y,0])f(z)$ für $x,y \in \mathbb{Z}$ und $z \in (\mathbb{Q}/\mathbb{Z})^\wedge$. Man rechnet nach, daß h die in (6.8) geforderten Eigenschaften besitzt. Damit ist (6.8) vollständig bewiesen.

Probleme. Die in der vorangehenden, [6], und in dieser Arbeit bewiesenen Sätze lassen eine Reihe von Fragen offen. Wesentlich erscheinen mir vor allem die folgenden:

Ist der natürliche Homomorphismus w von G in das Chu-Quasi-Dual $c\,G$ von G für jede lokalkompakte ([MAP]-)Gruppe G dicht? Liegt jede Gruppe aus $\mathfrak{D}$ schon in $\mathfrak{A}$?

Sind die Klassen $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ abgeschlossen gegen Bildung endlicher Produkte? (Nach (5.1) und (5.2) genügt es, die beiden letzten Fragen für totalunzusammenhängende Gruppen zu untersuchen.) Kann man die Struktur der (diskreten) Gruppen in $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{D}$ oder $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ näher beschrieben, ist jede Gruppe in $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{D}$ bereits eine [MOORE]-Gruppe?

Literatur

[1] CHU, H.: Compactification and duality of topological groups. Trans. Amer. Math. Soc. **123**, 310—324 (1966).

[2] HEYER, H.: Dualität lokalkompakter Gruppen. Berlin—Heidelberg—New York: Springer. 1970.

[3] LEPTIN, H., and L. ROBERTSON: Every locally compact MAP group is unimodular. Proc. Amer. Math. Soc. **19**, 1079—1082 (1968).

[4] MONTGOMERY, D., and L. ZIPPIN: Topological Transformation Groups. New York: Interscience Publ. 1955.

[5] POGUNTKE, D.: A universal property of the Takahashi-quasi-dual. Can. J. Math. **24**, 530—536 (1972).

[6] POGUNTKE, D.: Zwei Klassen lokalkompakter maximal fastperiodischer Gruppen. Mh. Math. **81**, 15—40 (1976).

[7] PONTRJAGIN, L. S.: Topologische Gruppen, Teil 2. Leipzig: Teubner. 1958.

[8] WILCOX, T.: On the structure of maximally almost periodic groups. Bull. Amer. Math. Soc. **73**, 732—734 (1967).

[9] YAMABE, H.: Generalization of a theorem of Gleason. Ann. Math. **58**, 351—365 (1953).

Dr. D. POGUNTKE
Fakultät für Mathematik
Universität Bielefeld
Kurt-Schumacher-Straße 6
D-4800 Bielefeld, Postfach 8640
Bundesrepublik Deutschland