Computing 9, 69—73 (1972)

Verfahren zur Berechnung des Spektralradius nichtnegativer irreduzibler Matrizen II

Von

L. Elsner, Erlangen

(Eingegangen am 11. November 1971)

Zusammenfassung — Summary

Verfahren zur Berechnung des Spektralradius nichtnegativer irreduzibler Matrizen II. In Ergänzung einer früheren gleichlautenden Arbeit werden weitere iterative Verfahren zur Berechnung des Spektralradius und des zugehörigen positiven Eigenvektors einer nichtnegativen irreduziblen Matrix angegeben und die Konvergenz bewiesen. Dabei streben die kleinsten Quotienten der Näherungsvektoren monoton gegen den Spektralradius. Es werden Einschließungsaussagen für den positiven Eigenvektor y bewiesen und daraus die Konvergenz der Näherungen gegen y hergeleitet.

Methods for computing the spectral radius of a non-negative irreducible matrix II. Supplementary to a former paper with the same title additional iterative methods for computing the spectral-radius and the positive eigenvector of a nonnegative irreducible matrix are given and convergence is proved. Here the smallest quotients of the approximating vectors are monotously converging to the spectral radius. Inclusions for the positive eigenvector y are given, from which the convergence of the approximations to y is deduced.

1. Einleitung

In einer früheren Arbeit [2] wurde eine Klasse von Verfahren zur Berechnung des Spektralradius ω und des zugehörigen positiven Eigenvektors y einer nichtnegativen irreduziblen $N \times N$-Matrix A behandelt. Dabei wird, ausgehend von einem beliebigen positiven Vektor $x^{(0)}$, eine Folge von Näherungsvektoren $x^{(i)}$ für y konstruiert. $x^{(i+1)}$ entsteht aus $x^{(i)}$ bis auf Normierung dadurch, daß diejenige Komponente von $x^{(i)}$, zu der der kleinste Quotient $(Ax)_k/x_k$ gehört, mit einem Faktor $d_i \leq 1$ multipliziert wird. Unter einfachen Voraussetzungen an die Wahl der d_i wurde in [2] Konvergenz der $x^{(i)}$ gegen y gezeigt. Dabei konvergiert die Folge der größten Quotienten R_i monoton gegen ω. Hier wird nun das analoge Verfahren untersucht, bei dem jeweils die Komponente, zu der der größte Quotient gehört, vergrößert wird. Das ergibt eine Folge von Vektoren, deren kleinste Quotienten r_i monoton steigen. Unter gewissen Voraussetzungen, die denen in [2] entsprechen, ist auch hier die Konvergenz beweisbar. Die Übertragung des Beweises von [2] ist aber nicht immer möglich.

Im zweiten Abschnitt (*Satz* 1) wird gezeigt, daß unter den erwähnten Voraussetzungen die r_i gegen ω streben. Im dritten Abschnitt werden Einschließungsaussagen für den Eigenvektor y hergeleitet, die einige in der Literatur vorliegende Abschätzungen verbessern. Der angekündigte Konvergenzsatz folgt ebenfalls daraus.

Die Bezeichnungen entsprechen denen in [2].

2. Eine Klasse von Verfahren

Es sei A eine nichtnegative irreduzible $N \times N$-Matrix, $\omega = \rho(A)$ der Spektralradius von A und y der durch $\| y \| = 1$ ($\| \dots \|$ irgendeine Norm in R^N) eindeutig festgelegte positive Eigenvektor: $Ay = \omega y$. $x \leq z$ $(x, z \in R^N)$ bedeute $x_i \leq z_i$ für $i = 1, \dots, N$. Zu gegebenem positiven Vektor $x = (x_1, \dots, x_N) > 0$ (d. h. $x_i > 0$, $i = 1, \dots, N$) sei

$$R_i(x) = (Ax)_i / x_i = \sum_{k=1}^{N} a_{ik} x_k / x_i$$

der i-te Quotient. ($i = 1, \dots, N$.) Bekanntlich gilt nach dem Quotientensatz [1] für jedes $x > 0$

$$\min_k R_k(x) \leq \omega \leq \max_k R_k(x)$$

Ausgehend von $x^0 > 0$ konstruieren wir eine Folge positiver Vektoren $x^i = (x_1^i, \dots, x_N^i)$ mit zugehörigen Quotienten R_k^i folgendermaßen:
Sei $\nu = \nu(n)$, $\mu = \mu(n)$ so gewählt, daß

$$R_\nu^n \leq R_i^n \leq R_\mu^n \tag{1}$$

für $i = 1, \dots, N$ gilt. Mit noch zu bestimmenden Größen d_n sei

$$\tilde{x}_k^{n+1} = \begin{cases} x_k^n & k \neq \mu(n) \\ d_n x_k^n & k = \mu(n) \end{cases} \tag{2}$$

$$x^{n+1} = \tilde{x}^{n+1} / \| \tilde{x}^{n+1} \|. \tag{3}$$

Es sei $r_n = R_\nu^n = \min R_i^n$. Dann gilt

Satz 1. *Sei d_n so gewählt, daß (a), (b), (c) erfüllt sind:*

(a) $R_\nu^n < R_\mu^n \Rightarrow d_n > 1$.

(b) $\exists \{n(i)\}$, $\lim\limits_i d_{n(i)} = 1 \Rightarrow \lim r_n = \omega$.

(c) $\exists\, \alpha$: $0 < \alpha < 1$ mit

$$R_{\mu(n)}^{n+1} \geq \alpha R_{\mu(n)}^n + (1 - \alpha) R_{\nu(n)}^n \tag{4}$$

Dann ist $\lim r_n = \omega$.

Beweis. Da die Quotienten homogene Funktionen des Vektors x sind, kann beim Beweis die Normalisierung (3) unbeachtet bleiben. Wegen (a) ist bei dieser Verabredung x_k^n für jedes k in n monoton nicht fallend. Allgemein gilt $(\mu = \mu(n))$:

$$\begin{aligned} R_i^{n+1} &= R_i^n + (d_n - 1)\, a_{i\mu}\, x_\mu^n / x_i^n \qquad i \neq \mu \\ R_\mu^{n+1} &= a_{\mu\mu} + (R_\mu^n - a_{\mu\mu}) / d_n \end{aligned}$$

Zusammen mit (a) und (c) folgt

$$r_1 \leq \dots \leq r_n \leq r_{n+1} \dots \leq \omega.$$

Sei $I = \{p \in \{1, \dots, N\},\ p \neq \mu(n)$ für alle hinreichend großen $n\}$. Wir machen nun eine Fallunterscheidung.

Fall 1. $I \neq \Phi$. Offenbar ist auch $J = \{1, \dots, N\} \div I \neq \Phi$. Wegen der Irreduzibilität von A gibt es $k \in I$, $l \in J$, $a_{kl} > 0$. Für hinreichend großes n ist wegen $\mu(n) \neq k$ stets

$$R_k^{n+1} = R_k^n + (d_n - 1)\, a_{k\mu(n)}\, x_{\mu(n)}^n / x_k^n \tag{5}$$

und x_k^n konstant. Insbesondere ist $a_{kl}\, x_l^n / x_k^n$ nach unten beschränkt.

Fall 1a. Es gibt eine Teilfolge $n(i)$ mit $d_{n(i)} \to 1$. Nach (b) folgt die Behauptung.

Fall 1b. Es gibt $\varepsilon > 0$ mit $d_n \geq 1 + \varepsilon$ für alle n. Da immer wieder $\mu(n) = l$ ist, folgt nach (5) $\lim\limits_n R_k^n = \infty$.

Für $s \in J$ ist $\lim x_s^n = \infty$. Daher gibt es $s \in J$, so daß $x_s^n = \max\limits_i x_i^n$ für abzählbar viele n gilt.

Sei $M = \sum\limits_j a_{sj}$ und N_0 so groß, daß $R_k^n > M\alpha^{-1}$ für alle $n \geq N_0$ ist. Ist x_s^n maximal, so ist $R_s^n \leq \sum\limits_j a_{sj} = M$, für $n \geq N_0$ ist dann also $\mu(n) \neq s$. Anders gewendet: Ist $\mu(n) = s$, so ist x_s^n nicht maximal. Es gibt daher $n \geq N_0$ mit x_s^n nicht maximal, aber x_s^{n+1} maximal. Dann ist wegen der Monotonie der x_j^n sicher $x_s^{n+1} > x_s^n$, also $\mu(n) = s$ und wegen (c) $R_s^{n+1} \geq \alpha\, R_s^n$. Daher

$$M\alpha^{-1} < R_k^n \leq R_s^n \leq \alpha^{-1}\, R_s^{n+1} \leq M\alpha^{-1}.$$

Fall 1b) tritt also nicht auf.

Fall 2. $I = \Phi$. Dieser Fall wird völlig analog zu [2] behandelt und nur der Vollständigkeit halber aufgeführt. Es gibt ein p, so daß für abzählbar viele n gilt: $\nu(n) = p$. Dann gibt es Zahlenfolgen $m(i)$, $n(i)$ mit

$$m(i) < n(i) < m(i+1), \quad \mu\big(m(i)\big) = \nu\big(n(i)\big) = p \quad i = 1, 2, \dots,$$
$$m(i) < n < n(i) \Rightarrow \mu(n) \neq p.$$

Dann gilt $R_p^{m(i)+1} \leq R_p^{n(i)} = r_{n(i)}$, also

$$0 \leq \omega - r_{n(i)} \leq \omega - R_p^{m(i)+1} \leq \alpha\,(\omega - R_p^{m(i)}) + (1-\alpha)\,(\omega - R_{\nu(m(i))}^{m(i)}) \leq (1-\alpha)\,(\omega - r_{m(i)})$$

Zusammen mit der Monotonie der r_i folgt daraus $\lim r_n = \omega$. Q.E.D.

3. Einschließung des Eigenvektors

Grundlage der folgenden Einschließungen ist das

Lemma. *Sei $A \geq 0$, $x > 0$, $z > 0$, $Ax \leq \alpha x$, $Az \geq \beta z$, $x_i/z_i = \min x_j/z_j$. Ist k ein Index mit $a_{ik} > 0$, so gilt*

$$\frac{x_i}{z_i} \leq \frac{x_k}{z_k} \leq \left(1 + \frac{\alpha - \beta}{a_{ik}}\, \frac{z_i}{z_k}\right) \frac{x_i}{z_i} \tag{6}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha - \beta}{a_{ik}}\, \frac{x_i}{x_k}\right) \frac{z_i}{x_i} \leq \frac{z_k}{x_k} \leq \frac{z_i}{x_i}. \tag{7}$$

Beweis. Aus

$$\alpha - \beta \geq (Ax)_i/x_i - (Az)_i/z_i = \sum_j a_{ij}\, \frac{z_j}{z_i} \left(\frac{x_j z_i}{x_i z_j} - 1\right)$$

und $\frac{z_i x_j}{x_i z_j} \geq 1$ $(j=1, \ldots, N)$ folgt

$$a_{ik} \frac{z_k}{z_i} \left(\frac{x_k z_i}{x_i z_k} - 1 \right) \leq \alpha - \beta$$

und daraus (6). Eine triviale Umformung ergibt (7).

Folgerung 1. Ist $A>0$, $x=y$ der Eigenvektor zum Spektralradius ω, $z=(1, \ldots, 1)$, so sind die Voraussetzungen des Lemmas mit $\alpha=\omega$, $\beta=r=\min_i \sum_k a_{ik}$ erfüllt. (6) ergibt nun

$$\max_{j,k} \frac{y_j}{y_k} \leq 1 + \frac{\omega - r}{m},$$

wobei $m = \min \{a_{jk} \mid j \neq k\}$ ist.

Wegen $\omega \leq R = \max_i \sum_k a_{ik}$ folgt daraus sofort eine Abschätzung von OSTROWSKI [5]

$$\operatorname*{Max}_{j,k} \frac{y_j}{y_k} \leq 1 + \frac{R-r}{m}$$

Folgerung 2. Sei $A \geq 0$ irreduzibel, $x>0$, $z>0$, $Ax \leq \alpha x$, $Az \geq \beta z$, $x_i/z_i = \min!$, $m = \min \{a_{ik} \mid a_{ik}>0,\ i \neq k\}$. Zu gegebenem k gibt es $s \leq N-1$ mit $a_{ik}^{(s)} = (A^s)_{ik} > 0$. Wendet man das Lemma auf A^s an, so ergibt (6) bzw. (7):

$$\frac{x_i}{z_i} \leq \frac{x_k}{z_k} \leq \left(1 + \frac{\alpha^s - \beta^s}{a_{ik}^{(s)}} \frac{z_i}{z_k}\right) \frac{x_i}{z_i} \tag{8}$$

$$\left(1 - \frac{\alpha^s - \beta^s}{a_{ik}^{(s)}} \frac{x_i}{x_k}\right) \frac{z_i}{x_i} \leq \frac{z_k}{x_k} \leq \frac{z_i}{x_i} \tag{9}$$

Mit $z=(1, \ldots, 1)$ ergibt (8) (r wie in Folgerung 1)

$$\frac{x_k}{x_i} \leq 1 + \frac{\alpha^s - r^s}{m^s}$$

und damit

$$\max_{j,k} \frac{x_k}{x_j} \leq 1 + \frac{\alpha^{N-1} - r^{N-1}}{m^{N-1}}$$

Das verbessert eine Abschätzung von SCHNEIDER [6]

$$\max_{j,k} \frac{x_k}{x_j} \leq \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{N-1}$$

Als dritte Folgerung beweisen wir

Satz 2. *Unter den Voraussetzungen von Satz 1 gilt*

$$\lim_n x^n = y \tag{10}$$

$$\lim_n R_k^n = \omega \qquad k=1, \ldots, N \tag{11}$$

Beweis. Wir verwenden (9) für $x=y$, $\alpha=\omega$, $z=x^n$, $\beta=r_n$ und erhalten wegen $\lim r_n=\omega$ (nach *Satz* 1) für beliebiges j, k

$$\lim_n \frac{x_k^n}{y_k} \cdot \frac{y_j}{x_j^n}=1. \tag{12}$$

Jeder Häufungspunkt der x^n ist wegen (12) und der Normierung $\| x^n \|=1$ gleich y. Das zeigt (10) und (11). Q.E.D.

4. Ein Beispiel

Die Klasse der Verfahren, die die Voraussetzungen von *Satz 1* und *2* erfüllen, ist nicht leer. Den in [2] angegebenen Verfahren lassen sich jeweils analoge Verfahren der hier beschriebenen Art zur Seite stellen. Dem Verfahren 1 entspricht hier bei gegebenem $0<\alpha<1$ die Vorschrift

$$d_n=\begin{cases} \dfrac{R_\mu^n-a_{\mu\mu}}{\alpha\, R_\mu^n+(1-\alpha)\, R_\nu^n-a_{\mu\mu}} & \text{falls der Nenner positiv ist} \\ d & \text{sonst} \end{cases}$$

wobei $d>1$ fest gewählt ist. Man sieht leicht, daß (a)–(c) erfüllt sind. $d_n=d$ kann nur zu Beginn auftreten. Ebenso lassen sich die Verfahren 2 und 3 von [2] übertragen, wenn man wie oben gewisse Abänderungen vornimmt, falls d_n unendlich oder negativ wird. Das obige Verfahren liefert für die in [2] angegebene Matrix für $\alpha=0{,}5$ den Spektralradius bereits nach 13 Schritten mit einer Genauigkeit von 10^{-4}, wogegen das entsprechende Verfahren in [2] dazu 16 Schritte benötigt.

Literatur

[1] Collatz, L.: Einschließungssatz für die charakteristischen Zahlen von Matrizen. Math. Z. **48**, 221—226 (1942).

[2] Elsner, L.: Verfahren zur Berechnung des Spektralradius nichtnegativer irreduzibler Matrizen. Computing **8**, 32—39 (1971).

[3] Hall, C. A., und T. A. Porsching: Computing the maximal eigenvalue and eigenvector of a positive matrix. SIAM J. Num. Anal. **5**, 269—274 (1968).

[4] Hall, C. A., und T. A. Porsching: Computing the maximal eigenvalue and eigenvector of a nonnegative irreducible matrix. SIAM J. Num. Anal. **5**, 470—474 (1968).

[5] Ostrowski, A.: Bounds for the greatest latent root of a positive matrix. J. London Math. Soc. **27**, 253—256 (1952).

[6] Schneider, H.: Note on the fundamental theorem on irreducible non-negative matrices. Proc. Edinburgh Math. Soc. **11**, 127—130 (1958/59).

Ludwig Elsner
Institut für Angewandte Mathematik I
der Universität Erlangen
Erwin-Rommel-Straße 60
D-852 Erlangen, Deutschland