

## Einfache Moduln über gewissen Banachschen Algebren: Ein Imprimitivitätssatz

Detlev Poguntke

Fakultät für Mathematik der Universität, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

Dieser Artikel enthält im wesentlichen eine Verallgemeinerung des Hauptergebnisses in meiner Arbeit [5] und einige Anwendungen derselben auf die Frage nach der Symmetrie gewisser Banachscher Algebren. Zunächst sei dargelegt, welche Klasse von Algebren wir untersuchen wollen. Dabei fixieren wir auch die Bezeichnungen für den ganzen Artikel.

Es seien stets  $G$  eine lokalkompakte Gruppe,  $H$  ein diskreter Normalteiler in  $G$ ,  $A$  eine involutive Banachsche Algebra mit isometrischer Involution  $a \rightarrow a^*$  und  $U$  eine kommutative, involutive, reguläre, symmetrische, halbeinfache Banachsche Algebra mit isometrischer Involution  $u \rightarrow u^*$ . Die Gruppe  $G$  operiere stark stetig durch isometrische  $*$ -Isomorphismen auf  $A$  und  $U$ , wir schreiben hierfür  $(x, a) \rightarrow a^x$  bzw.  $(x, u) \rightarrow u^x$ .  $G$  operiert dann auch auf dem Gelfandschen Raum  $\hat{U}$  von  $U$ ,  $(t\chi)(u) = \chi(u^t)$  für  $t \in G$ ,  $u \in U$  und  $\chi \in \hat{U}$ . Wir wählen ein für allemal fest ein  $\chi \in \hat{U}$ . Es sei  $H$  der Stabilisator von  $\chi$ ; mit  $x \rightarrow \dot{x}$  bezeichnen wir den Quotientenhomomorphismus  $G \rightarrow G/H$ . Die Abbildung  $\dot{t} \rightarrow t\chi$  von  $G/H$  in  $\hat{U}$  sei ein Homöomorphismus. Man kann also  $\hat{U}$  mit  $G/H$  identifizieren, wir schreiben daher  $\hat{u}(\dot{t}) := (t\chi)(u) = \chi(u^t)$ , d. h., wir betrachten die Gelfand-Transformierten als Funktionen auf  $G/H$ . Weiter möge  $U$  die beiden folgenden Voraussetzungen erfüllen:

- (i)  $U_k := \{u \in U : \hat{u} \text{ hat einen kompakten Träger}\}$  liegt dicht in  $U$ .
- (ii) Zu jeder Einsumgebung  $Z$  in  $G/H$  gibt es eine stetige Funktion  $f: G \rightarrow U$  mit  $f(z)^*(\dot{x}) = \hat{a}(\dot{x}\dot{z})$  für alle  $x, z \in G$  [wobei  $a := f(e)$ ],  $a \neq 0$  und  $\text{Trg}(\hat{a}) \subset Z$ .

Man kann also „genügend viele“ Funktionen in  $U$  auch Rechtstranslationen unterwerfen.

Weiter sei eine  $U$ -Modulstruktur auf  $A$  gegeben, welche mit all den anderen Strukturen verträglich sei, d. h., es gelte

$$\begin{aligned} \|ua\| &\leq \|u\| \|a\|, & u(ab) &= (ua)b = a(ub), \\ (ua)^* &= u^*a^*, & (ua)^x &= u^x a^x \end{aligned}$$

für  $u \in U$ ,  $a, b \in A$ ,  $x \in G$ . Schließlich sei vorausgesetzt, daß  $UA$  dicht in  $A$  liegt.

Wir können nun die Leptinschen Algebren  $B := L^1(G, A)$ ,  $L := L^1(H, A)$ ,  $D := L^1(G, U)$  sowie  $L' := L^1(H, A')$  mit  $A' := A/(\text{Kern } \chi A)^-$  (man beachte, daß

Kern  $\chi A$  ein  $H$ -stabiles Ideal in  $A$  ist) bilden, wobei das Produkt, etwa in  $B$ , durch

$$(f * g)(x) = \int_G f(xy)^{y^{-1}} g(y^{-1}) dy$$

gegeben ist;  $dy$  ist dabei ein linkes Haarsches Maß auf  $G$ .  $B$  wird durch  $f^*(x) := \Delta(x)^{-1} f(x^{-1})^{**}$  ( $\Delta$  = Modularfunktion von  $G$ ) zu einer involutiven Algebra. Analog sind auch  $L$ ,  $D$ ,  $A'$  und  $L'$  involutive Algebren.

Es ist das Hauptergebnis dieses Artikels, daß die einfachen  $B$ -Moduln  $E$  in gewissem Sinne von einfachen  $L'$ -Moduln  $M$  „induziert“ sind oder, genauer, daß es eine  $B$ -lineare Einbettung von  $E$  in den  $B$ -Modul  $L^2(G, M)$  gibt, wobei  $L^2(G, M)$  der gewöhnlichen „unitären Induktion“ nachgebildet ist. Dem Beweis dieses Ergebnisses schicken wir zwei Hilfssätze voraus. Der Artikel wird beendet mit Anwendungen auf die Frage nach der Symmetrie gewisser Banachscher Algebren.

Wir wählen nun fest eine relativ kompakte offene symmetrische Umgebung  $W$  von  $e$  in  $G$  mit  $W^6 \cap H = (e)$  und weiter ein Element  $u \in U$  derart, daß der Träger  $\text{Trg}(\hat{u})$  in  $W$  liegt und  $\hat{u}$  in einer Umgebung von  $e$  gleich einer von Null verschiedenen Konstanten  $c$  ist. Dazu bilden wir die stetige Funktion  $\tilde{u}: G \rightarrow \mathbb{C}$ , definiert durch

$$\tilde{u}(x) = \begin{cases} \hat{u}(x), & x \in W \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

und setzen weiter voraus, daß  $\int |\tilde{u}(t^{-1})|^2 dt = 1$  ist. Schließlich definieren wir  $p: G \rightarrow U$  durch

$$p(x) = \begin{cases} \Delta(x)^{-1/2} u^x u^*, & x \in W^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit den eingeführten Bezeichnungen gelten die beiden folgenden Hilfssätze:

**Hilfssatz 1.**  $p$  ist ein hermitesches Idempotent in  $D$ , und  $D * p * D$  liegt dicht in  $D$ .

**Hilfssatz 2.**  $B$  ist in kanonischer Weise ein Bimodul über  $D$  und  $L$ . Weiter kann man Funktionen aus  $L$  mit Funktionen aus  $D$  falten (und erhält Funktionen in  $B$ ). Für all diese Operationen verwenden wir ebenfalls den Faltungstern. In diesem Sinne gilt:

$$p * B * p \subseteq L * p \subseteq B.$$

*Beweis von Hilfssatz 1.* Offensichtlich liegt  $p$  in  $D = L^1(G, U)$ , und es gilt  $p = p^*$ . Um die Gleichung  $p = p * p$  nachzuweisen, bilden wir mit Hilfe der Gelfand-Transformation  $D$  injektiv in  $L^1(G, C_\infty(G/H))$  ab, d. h. wir setzen  $\hat{d}(x) := d(x)$  für  $d \in D$ ,  $x \in G$ ,  $d \mapsto \hat{d}$  ist ein  $*$ -Morphismus, wenn man die Multiplikation in  $L^1(G, C_\infty(G/H))$  durch

$$(f * g)(x, \dot{z}) = \int_G f(xy, \dot{y}^{-1} \dot{z}) g(y^{-1}, \dot{z}) dy$$

erklärt.

Speziell ist

$$\hat{p}(x, \dot{z}) = \begin{cases} \Delta(x)^{-1/2} \hat{u}(x \dot{z}) \bar{\hat{u}}(\dot{z}), & x \in W^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Mit Hilfe der Funktion  $\tilde{u}$  kann man in geschlossener Form schreiben

$$\hat{p}(x, z) = \Delta(x)^{-1/2} \int_H \tilde{u}(xzh) \tilde{u}(zh) dh,$$

wobei Integration über die diskrete Gruppe  $H$  natürlich einfach Summation bedeutet. Nun kann man ausrechnen:

$$(\hat{p} * \hat{p})(x, z) = \int_G \int_H \int_H \Delta(x)^{-1/2} \tilde{u}(xzh) \tilde{u}(y^{-1}zh) \tilde{u}(y^{-1}zk) \tilde{u}(zk) dy dh dk.$$

Da  $\tilde{u}(y^{-1}zh) \tilde{u}(y^{-1}zk) = 0$  ist für  $h \neq k$ , ergibt sich

$$\begin{aligned} (\hat{p} * \hat{p})(x, z) &= \Delta(x)^{-1/2} \int_H dh \tilde{u}(x, zh) \tilde{u}(zh) \int_G dy |\tilde{u}(y^{-1}zh)|^2 \\ &= \Delta(x)^{-1/2} \int_H dh \tilde{u}(xzh) \tilde{u}(zh) = \hat{p}(x, z). \end{aligned}$$

Beim Beweis der Dichtheit von  $D * p * D$  verwenden wir ähnliche Methoden wie beim Beweis des analogen, aber etwas schwächeren Satzes in [4]. Zunächst wählen wir eine offene relativ kompakte symmetrische Einsumgebung  $X$  in  $G$  mit  $\bar{X}^5 \subseteq W$  und der Eigenschaft, daß  $\hat{u}$  auf  $\bar{X}^5$  konstant ist, also gleich  $c$ . Mit  $E$  sei der Abschluß des zweiseitigen Ideals  $D * p * D$  in  $D$  bezeichnet. Offensichtlich genügt es zu zeigen, daß für jede stetige Funktion  $\varphi$  auf  $G$  mit kompaktem Träger und jedes  $q \in U_k$  die Funktion  $g$ , definiert durch  $g(x) = \varphi(x)q$ , in  $E$  liegt. Da für jedes  $s \in G$  mit  $f \in E$  auch die Funktionen  $x \mapsto f(xs^{-1})^s$  und  $x \mapsto f(s^{-1}x)$  in  $E$  liegen, zeigen Standard-Argumente über reguläre Banachsche Algebren (Zerlegung der Eins!), daß wir ohne Beschränkung der Allgemeinheit annehmen dürfen, daß der Träger von  $\varphi$  in  $X$  und der Träger von  $\hat{q}$  in  $\bar{X}$  liegt. Sei nun  $\varepsilon > 0$  gegeben. Wir wählen eine symmetrische offene Einsumgebung  $Y$  in  $G$  mit

$$Y \text{ Trg}(\varphi) Y \subseteq X$$

und

$$|\Delta(zt)^{1/2} \varphi(zxt) - \varphi(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle } x \in G \text{ und alle } z, t \in Y.$$

Wegen der geforderten Eigenschaft (ii) von  $U$  gibt es eine stetige Funktion  $z \rightarrow a_z$  von  $G$  in  $U$  mit  $\hat{a}_z(\dot{x}) = \hat{a}(\dot{x}\dot{z})$  ( $a := a_e$ ),  $\hat{a} \geq 0$ ,  $\int_G \hat{a}(\dot{t}) d\dot{t} = 1$  und  $\text{Trg}(\hat{a}) \subseteq \bar{Y}$ .

Wir setzen nun

$$f := \int_{\bar{X}^2} dt \int_{\bar{X}^3} dz \Delta(z^{-1}t)^{1/2} \varphi(z^{-1}t) (a_z \circ (a, q))^* \in L^1(G, U),$$

wobei für  $t, z \in X^3$  das Element  $a_z \circ (a, q)^* \in L^1(G, U)$  erklärt ist durch

$$[a_z \circ (a, q)^*](s) = \begin{cases} \Delta(s)^{-1/2} a_z^s a, & s \in W^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Und wir behaupten, daß  $f$  in  $E$  liegt und eine „gute Approximation“ für das vorgelegte  $g$  ist. Zunächst zeigen wir, daß  $f(x) = \psi(x)q$  mit

$$\psi(x) = \int_Y \int_Y dt dz \Delta(z^{-1}t)^{1/2} \varphi(z^{-1}xt) \hat{a}(\dot{z}) \hat{a}(\dot{t}).$$

Dazu bilden wir  $\hat{f}$ ,

$$\hat{f}(s, \dot{y}) = \int_{X^2} dt \int_{X^3} dz \Delta(z^{-1}t)^{1/2} \varphi(z^{-1}t) \Delta(s)^{-1/2} \hat{a}(\dot{s}\dot{y}\dot{z}) \hat{a}(\dot{y}\dot{t}) \hat{q}(\dot{y})$$

für  $s \in W^2$ , sonst ist  $\hat{f} = 0$ .

Durch Übergang zu den Variablen  $z' = syz, t' = yt$  (wobei ein Repräsentant  $y$  für  $\dot{y}$  in  $X$  gewählt wird) erhält man

$$\hat{f}(s, \dot{y}) = \int_{yX^2} dt \int_{syX^3} dz \Delta(z^{-1}t)^{1/2} \varphi(z^{-1}st) \hat{a}(\dot{z}) \hat{a}(\dot{t}) \hat{q}(\dot{y})$$

für  $s \in W^2, y \in X$ ; sonst ist  $\hat{f} = 0$ .

Da  $\hat{a}(\dot{t})$  für  $t \in yX^2 \setminus Y$  verschwindet, brauchen wir nur über  $Y \cap yX^2 = Y$  zu integrieren. Ebenso brauchen wir die Variable  $z$  nur über  $Y \cap syX^3$  zu integrieren. Diese Integration können wir ersetzen durch eine Integration über  $Y$ ; denn ist  $z \in Y$ , aber nicht in  $syX^3$ , also auch nicht in  $sX^2$ , so liegt  $z^{-1}st$  für  $t \in Y \subseteq X$  nicht in  $X$ , was bedeutet, daß  $\varphi(z^{-1}st) = 0$  ist. Gemäß der Definition von  $\psi$  finden wir damit  $\hat{f}(s, \dot{y}) = \hat{q}(\dot{y})\psi(s)$  für  $s \in W^2, \dot{y} \in \dot{X}$  und  $\hat{f}(x, \dot{y}) = 0$ , falls  $s \notin W^2$  oder  $\dot{y} \notin \dot{X}$ . Betrachten wir nun die Transformierte der Funktion  $x \rightarrow \psi(x)q$ , so stimmt diese natürlich für  $s \in W^2$  und  $\dot{y} \in \dot{X}$  mit  $\hat{f}$  überein, aber dies gilt auch für die übrigen Stellen, da  $\hat{q}(\dot{y}) = 0$  für  $\dot{y} \notin \dot{X}$  und  $\psi(s) = 0$  für  $s \notin W^2$  (sogar für  $s \notin X$ ). Damit ist die Gleichung  $f(x) = \psi(x)q$  bewiesen. Als nächstes zeigen wir, daß  $g$  durch  $f$  approximiert wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} \|g - f\|_D &= \int_G \|g(x) - f(x)\|_U dx = \int_G |\varphi(x) - \psi(x)| \|q\|_U dx \\ &= \|q\|_U \int_X |\varphi(x) - \psi(x)| dx. \end{aligned}$$

Da  $\int_Y \hat{a}(\dot{t}) dt = 1$ , gilt

$$\varphi(x) = \int_Y \int_Y dt dz \hat{a}(\dot{t}) \hat{a}(\dot{z}) \varphi(x)$$

und daher

$$\varphi(x) - \psi(x) = \int_Y \int_Y dt dz \hat{a}(\dot{t}) \hat{a}(\dot{z}) \{ \varphi(x) - \Delta(z^{-1}t)^{1/2} \varphi(z^{-1}xt) \},$$

also

$$|\varphi(x) - \psi(x)| \leq \int_Y \int_Y dt dz \hat{a}(\dot{t}) \hat{a}(\dot{z}) \varepsilon = \varepsilon.$$

Schließlich finden wir  $\|g - f\|_D \leq \varepsilon \|q\|_U |X|$ , wobei  $|X|$  das Haarsche Maß von  $X$  bezeichnet. – Als letztes müssen wir noch zeigen, daß  $f$  tatsächlich in  $E$  liegt. Dazu genügt es natürlich zu zeigen, daß die oben konstruierte Funktion  $a_z \circ (a_t q)^*$  für  $z \in X^3, t \in X^2$  in  $E$  liegt. Nun ist offenbar  $a_z * p * a_t q$  in  $E$ , und es gilt

$$(a_z * p * a_t q)(s) = a_z^s p(s) a_t q,$$

also

$$(a_z * p * a_t q)(s) = \begin{cases} \Delta(s)^{-1/2} a_z^s u^s u^* a_t q, & s \in W^2 \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Wegen  $\hat{u} \equiv c$  in  $\overline{X^5}$  gilt  $a_z^s u^s = c a_z^s$  und  $u^* a_t = \bar{c} a_t$ , also  $a_z * p * a_t q = |c|^2 a_z \circ (a_t q)^*$ .

*Beweis von Hilfssatz 2.* Die Wirkungen von  $D$  und  $L$  auf  $B$  sind ziemlich offensichtlich. Exemplarisch (und auch weil es gleich gebraucht wird) sei die Faltung einer Funktion  $\varphi \in L$  mit einer Funktion  $g \in D$  hingeschrieben. Es gilt für  $x \in G$ :

$$\begin{aligned}(\varphi * g)(x) &= \int_H dy \varphi(y)^{y^{-1}x} g(y^{-1}x) \\ &= \int_H dy g(y^{-1}x) \varphi(y)^{y^{-1}x},\end{aligned}$$

wobei das „Produkt“ aus  $g(z) \in U$  und  $\varphi(y)^z \in A$  natürlich die gegebene  $U$ -Modulstruktur auf  $A$  bezeichnet; die kommutative Algebra  $U$  operiert auch von rechts auf  $A$ . Speziell wird dieses Faltungsprodukt nun für  $g = p$  berechnet. Dazu stellen wir zunächst fest, daß mit  $V := W^2$  für ein  $x \in G$  gilt: Entweder ist  $Hx \cap V$  leer oder einpunktig (nämlich genau dann, wenn  $x \in HV = VH$ ). Damit ergibt sich

$$(\varphi * p)(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } Hx \cap V = \emptyset \\ \Delta(v)^{-1/2} u^v u^* \varphi(xv^{-1})^v, & \text{falls } Hx \cap V = \{v\}. \end{cases}$$

Es sei nun ein  $f \in p * B * p$  vorgelegt. Wir haben ein  $\varphi \in L$  anzugeben mit  $f = \varphi * p$ . Zunächst gilt  $f = p * f * p$ , also

$$f(x) = (p * f * p)(x) = \int_G \int_G dy ds p(xy)^{y^{-1}} p(s^{-1}) f(y^{-1}s)^{s^{-1}}.$$

Durch Einführen der neuen Variablen  $z = xy$  ergibt sich

$$\begin{aligned}f(x) &= \int_G \int_G dz ds p(z)^{z^{-1}x} p(s^{-1}) f(z^{-1}xs)^{s^{-1}} \\ &= \int_V \int_V dz ds \Delta(zs^{-1})^{-1/2} u^{s^{-1}} u^* u^x u^{*z^{-1}x} f(z^{-1}xs)^{s^{-1}}.\end{aligned}$$

Da  $u^* u^x = 0$  für  $x \notin HV$ , erkennen wir, daß  $f(x) = 0$  für  $x \notin HV$ . Nehmen wir nun  $x \in HV$ , etwa  $x = hv$ , an. Mit der neuen Variablen  $t = vs$  erhalten wir unter Ausnutzen von  $u^x = u^{hv} = u^v$  die Beziehung

$$\begin{aligned}f(hv) &= \int_V dz \int_{vV} dt \Delta(zt^{-1}v)^{-1/2} u^{t^{-1}v} u^* u^v u^{*z^{-1}v} f(z^{-1}ht)^{t^{-1}v} \\ &= \int_V dz \int_V dt \Delta(zt^{-1}v)^{-1/2} u^{t^{-1}v} u^* u^v u^{*z^{-1}v} f(z^{-1}ht)^{t^{-1}v},\end{aligned}$$

da der Integrand in  $vV \setminus V \cap vV$  und in  $V \setminus V \cap vV$  verschwindet. Eine einfache Umformung ergibt

$$f(hv) = \Delta(v)^{-1/2} u^v u^* \left\{ \int_V \int_V dz dt \Delta(zt^{-1})^{-1/2} u^{t^{-1}} u^{*z^{-1}} f(z^{-1}ht)^{t^{-1}} \right\}^v$$

Setzen wir nun

$$\varphi(h) := \int_V \int_V dz dt \Delta(zt^{-1})^{-1/2} u^{t^{-1}} u^{*z^{-1}} f(z^{-1}ht),$$

so sieht man leicht, daß  $\varphi$  in  $L$  liegt, d. h. über  $H$  summierbar ist, und die zu Beginn des Beweises durchgeführte Rechnung zeigt  $f = \varphi * p$ .

Es sei nun  $M$  ein einfacher  $L' = L^1(H, A')$ -Modul; die zugehörige Darstellung sei mit  $\varrho$  bezeichnet, d. h.  $f\xi = \varrho(f)\xi$  für  $f \in L'$ ,  $\xi \in M$ . Wir wollen den davon „induzierten“  $B$ -Modul  $\tilde{M}$  beschreiben. Indem man  $M$  als Quotienten von  $L'$  realisiert, sieht man, daß man auf  $M$  eine Norm einführen kann, so daß  $M$  zu einem Banachschen  $L'$ -Modul wird, und weiter, daß man eine Darstellung  $\varrho_1$  von  $H$  durch Isometrien auf  $M$  sowie eine Darstellung  $\varrho_2$  von  $A'$  in  $M$  findet mit

$$\varrho_2(a^x) = \varrho_1(x)^{-1} \varrho_2(a) \varrho_1(x) \quad \text{für } a \in A', x \in H$$

und

$$\varrho(f)\xi = \int_H \varrho_1(x) \varrho_2(f(x)) \xi dx \quad \text{für } \xi \in M, f \in L'.$$

Dann sei  $M_i$  der Raum aller stetigen Funktionen  $\varphi: G \rightarrow M$  mit  $\varphi(xh) = \varrho_1(h)^{-1} \varphi(x)$  ( $x \in G, h \in H$ ) und der Eigenschaft, daß  $\varphi$  einen kompakten Träger modulo  $H$  hat. Wir normieren  $M_i$  durch  $\|\varphi\|^2 = \int_{G/H} \|\varphi(x)\|^2 dx$ ; dabei sei  $dx$  ein so normiertes linkes Haarsches Maß auf  $G/H$ , daß die Weilsche Formel gilt. Mit  $\tilde{M}$  bezeichnen wir die Kompletterung von  $M_i$  in dieser Norm.  $G$  und  $A$  operieren in  $M_i$  (und dann auch in  $\tilde{M}$ ) durch:

$$(\tilde{\varrho}_1(x)\varphi)(y) = \varphi(x^{-1}y)$$

und

$$(\tilde{\varrho}_2(a)\varphi)(y) = \varrho_2(Q(a^y))\varphi(y),$$

wobei  $Q: A \rightarrow A'$  den Quotientenmorphimus bezeichnet. Es gilt dann

$$\tilde{\varrho}_2(a^x) = \tilde{\varrho}_1(x)^{-1} \tilde{\varrho}_2(a) \tilde{\varrho}_1(x) \quad \text{für } a \in A, x \in G.$$

Schließlich definieren wir die „induzierte Darstellung“  $\tilde{\varrho}$  von  $B = L^1(G, A)$  in  $\tilde{M}$  durch

$$\tilde{\varrho}(f)\varphi = \int_G \tilde{\varrho}_1(x) \tilde{\varrho}_2(f(x)) \varphi dx.$$

Nach diesen Vorbereitungen können wir nun das Hauptergebnis formulieren.

**Satz 1.** *Zu jedem einfachen  $B$ -Modul  $E$  gibt es einen einfachen  $L'$ -Modul  $M$  und eine  $B$ -lineare Einbettung von  $E$  in  $\tilde{M}$ .*

**Korollar.** *Aus der Symmetrie von  $L'$  folgt die Symmetrie von  $B$ .*

*Bemerkung 1.* Für involutive Darstellungen in Hilbertschen Räumen wurde ein entsprechender „Imprimitivitätssatz“ in [9] bewiesen, dort sogar für allgemeine Untergruppen  $H$ .

*Beweis des Satzes.* Der einfache  $B$ -Modul  $E$  hat eine bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmte Norm, die ihn zu einem Banachschen  $B$ -Modul macht. Ferner gibt es eine stark stetige Darstellung  $\pi_1: G \rightarrow \text{Aut}(E)$  (o. B. d. A. durch Isometrien) und eine stetige Darstellung  $\pi_2: A \rightarrow \text{End}(E)$  mit

$$f\xi = \int_G \pi_1(x) \pi_2(f(x)) \xi dx \quad \text{für } f \in B, \xi \in E.$$

$E$  wird auch zu einem Banachschen  $D$ - und  $L$ -Modul, indem man  $\varphi(f\xi) = (\varphi * f)\xi$  für  $\xi \in E$ ,  $f \in B$  und  $\varphi \in D$  bzw.  $\varphi \in L$  setzt. Für  $\varphi \in L$  und  $\xi \in E$  gilt im übrigen auch  $\varphi\xi = \int_H \pi_1(h)\pi_2(\varphi(h))\xi$ . Für die Wirkung von  $U$  auf  $E$  (die analog definiert wird) verwenden wir ebenso wie für die von  $A$  das Symbol  $\pi_2$ . Weiter ist  $DE \neq 0$ , da  $D*B$  wegen  $\overline{UA} = A$  dicht in  $B$  liegt. Es gilt sogar  $pE \neq 0$ , denn aus  $pE = 0$  würde  $D*p*DE = 0$  und dann mit Hilfssatz 1  $DE = 0$  folgen. Aus der Einfachheit von  $E$  ergibt sich unmittelbar, daß  $pE$  ein einfacher Modul über  $p*B*p$  ist. Daraus und aus Hilfssatz 2 erhält man, daß  $pE \subseteq L\xi = LpE$  für jedes von Null verschiedene  $\xi$  in  $pE$  gilt.  $LpE$  ist also ein zyklischer  $L$ -Modul und besitzt folglich einen einfachen Quotienten, d. h., es gibt einen einfachen (Banachschen)  $L$ -Modul  $N$  und eine  $L$ -lineare Abbildung  $P: LpE \rightarrow N$  mit  $P(pE) \neq 0$ . Auf  $N$  lassen sich in kanonischer Weise eine  $A$ - und eine  $U$ -Modulstruktur einführen. Da die Wirkung von  $U$  mit der von  $L$  vertauscht, operiert  $U$  nach dem Schurschen Lemma ([1], p. 121) auf  $N$  skalar. Auf Grund der Voraussetzungen an  $U$  gibt es folglich ein modulo  $H$  eindeutig bestimmtes  $t \in G$  mit  $v\eta = (t\chi)(v)\eta = \chi(v^t)\eta$  für  $v \in U$ ,  $\eta \in N$ . Für eine spätere Anwendung bemerken wir, daß die Nebenklasse  $t = tH$  im Träger von  $\hat{u}$  (also auch im Abschluß von  $\hat{W}$ ) liegt. Nehmen wir einmal an, daß dies nicht der Fall ist. Dann gibt es wegen der Regularität von  $U$  ein  $v \in U$  mit  $\hat{v}(t) = 0$  und  $\hat{v} \equiv 1$  auf dem Träger von  $\hat{u}$ , insbesondere gilt  $vu = u$ . Wählen wir nun ein  $\xi \in pE$  mit  $P\xi \neq 0$ , so erkennt man an der Darstellung

$$\xi = p\xi = \int_G dx \pi_2(p(x)x^{-1})\pi_1(x)\xi = \int_V dx \Delta(x)^{-1/2} \pi_2(ux^{*x^{-1}})\pi_1(x)\xi,$$

daß  $\pi_2(v)\xi = \xi$ . Dann gilt aber

$$0 \neq P\xi = P\pi_2(v)\xi = \hat{v}(t)P\xi = 0$$

(da  $P$  linear über  $U$  ist), im Widerspruch zur Annahme. Wir wählen nun einen Repräsentanten  $t$  der Nebenklasse  $\hat{t}$ , welcher im Träger von  $\hat{u}$  liegt. Da wir einen Modul  $M$  angeben wollen, auf dem  $U$  mittels  $\chi$  wirkt, haben wir die konstruierten Größen um  $t$  zu verschieben bzw. zu konjugieren. Dazu stellen wir fest, daß die Gruppe  $G$  durch Automorphismen auf  $L$ ,  $D$  und  $B$  wirkt, indem man

$$\varphi^x(h) = \varphi(xhx^{-1})^x \quad \text{für } \varphi \in L$$

bzw.

$$f^x(y) = \Delta(x)^{-1} f(xy x^{-1})^x \quad \text{für } f \in B \text{ oder } f \in D \text{ setzt.}$$

Für diese Wirkungen gilt

$$f^x \xi = \pi_1(x)^{-1} f \pi_1(x) \xi,$$

wobei  $\xi \in E$  und  $f$  in  $L$ ,  $D$  oder  $B$ .

Wir setzen nun  $q = p^t$ . Der  $L$ -Modul  $LqE = Lp^tE = L\pi_1(t)^{-1}p\pi_1(t)E = \pi_1(t)^{-1}LpE$  kann mittels  $\pi_1(t)$  bijektiv auf  $LpE$  abgebildet werden.  $M$  sei der folgende einfache  $L$ -Modul: Als Raum stimmt  $M$  mit  $N$  überein, doch die Algebra  $L$  operiert durch  $\varphi\mu := \varphi^t{}^{-1}\mu$ , wobei auf der rechten Seite natürlich die Modulstruktur von  $N$  gemeint ist.  $M$  ist dann auch als  $L'$ -Modul auffaßbar. Weiter sei

$$R: LqE \rightarrow M$$

definiert durch  $R\xi = P(\pi_1(t)\xi)$ . Man rechnet ohne Mühe nach, daß  $R$  eine  $L$ -lineare Abbildung ist mit  $R(qE) \neq 0$ .

Wir verwenden nun die Satz 1 vorausgehenden Bezeichnungen. Insbesondere sei die Wirkung von  $L$  in  $M$  durch das Paar  $(\varrho_1, \varrho_2)$  gegeben. Natürlich muß bei der gewünschten Einbettung  $E \rightarrow \tilde{M}$  der Unterraum  $qE$  in  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$  übergehen. Wir berechnen daher zunächst den Projektor  $\tilde{\varrho}(q)$  und werden sehen, daß man  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$  kanonisch mit  $M$  identifizieren kann. Nach Definition von  $\tilde{\varrho}$  gilt für  $\xi \in \tilde{M}$  und  $z \in G$ :

$$\begin{aligned} (\tilde{\varrho}(q)\xi)(z) &= \int_G dy \chi(q(zy)^{y^{-1}}) \xi(y^{-1}) \\ &= \int_G dy \Delta(y)^{-1} \chi(q(zy^{-1})^y) \xi(y). \end{aligned}$$

Weiter gilt für  $a, b \in G$ :

$$\begin{aligned} \chi(q(a)^b) &= \Delta(t)^{-1} \chi(p(tat^{-1})^b) \\ &= \Delta(t)^{-1} \Delta(a)^{-1/2} \int_H \tilde{u}(tabh) \bar{u}(tbh) dh \\ &= \Delta(a)^{-1/2} \int_H F(abh) \bar{F}(bh) dh, \end{aligned}$$

wenn man  $F: G \rightarrow \mathbb{C}$  durch

$$F(x) = \Delta(t)^{-1/2} \tilde{u}(tx)$$

definiert.

Damit ergibt sich

$$(\tilde{\varrho}(q)\xi)(z) = \Delta(z)^{-1/2} \int_H dh \int_G dy \Delta(y)^{-1/2} F(zh) \bar{F}(yh) \xi(y).$$

Unter Ausnutzung der Weilschen Formel und des Transformationsverhaltens von  $\xi$  erhält man

$$\begin{aligned} (\tilde{\varrho}(q)\xi)(z) &= \Delta(z)^{-1/2} \int_{G/H} dy \int_H dh \int_H dk \Delta(y)^{-1/2} F(zh) \bar{F}(ykh) \varrho_1(k)^{-1} \xi(y) \\ &= \Delta(z)^{-1/2} \int_{G/H} dy \int_H dh \int_H dk \Delta(y)^{-1/2} F(zk^{-1}h) \bar{F}(yh) \varrho_1(k)^{-1} \xi(y) \\ &= \Delta(z)^{-1/2} \int_{G/H} dy \int_H dh \int_H dk \Delta(y)^{-1/2} F(zk) \bar{F}(yh) \varrho_1(kh^{-1}) \xi(y) \\ &= \Delta(z)^{-1/2} \int_{G/H} dy \int_H dh \int_H dk \Delta(y)^{-1/2} F(zk) \bar{F}(yh) \varrho_1(k) \xi(yh) \\ &= \Delta(z)^{-1/2} \int_H dk F(zk) \varrho_1(k) \int_G dy \Delta(y)^{-1/2} \bar{F}(y) \xi(y) \\ &= \Delta(z)^{-1/2} \varrho_1(\Phi_z) \int_G dy \Delta(y)^{-1/2} \bar{F}(y) \xi(y), \end{aligned}$$

wenn man  $\Phi_z: H \rightarrow \mathbb{C}$  (für  $z \in G$ ) durch  $\Phi_z(h) = F(zh)$  erklärt. Insbesondere ist also jedes Element in  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$  von der Form  $z \mapsto \Delta(z)^{-1/2} \varrho_1(\Phi_z) \xi$  mit passendem  $\xi \in M$ . In der Tat ist durch  $S: M \rightarrow \tilde{M}$ ,  $(S\xi)(z) = \Delta(z)^{-1/2} \varrho_1(\Phi_z) \xi$ , eine Isometrie von  $M$  auf  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$



definiert. Weiter hat  $S$  das folgende Transformationsverhalten für die jeweiligen  $L$ -Modul-Strukturen:

(T) Ist  $\varphi \in L$  mit  $\varphi * q = q * \varphi * q$ , so gilt  $S(\varphi \xi) = \tilde{\varrho}(\varphi) S \xi$  für alle  $\xi \in M$ .

Vor der Verifikation von (T) wollen wir zeigen, wie man nun eine (nicht-triviale)  $B$ -lineare Einbettung  $E \rightarrow \tilde{M}$  konstruieren kann. Wir definieren  $R': qE \rightarrow \tilde{M}$  durch

$$R'\eta = SR\eta$$

und dann  $\tilde{R}: E \rightarrow \tilde{M}$  durch

$$\tilde{R}(f\eta) = \tilde{\varrho}(f) R'\eta \quad \text{für } f \in B, \eta \in qE.$$

Zunächst einmal ist  $R'$  eine  $q*B*q$ -lineare Einbettung von  $qE$  in  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$ ; denn: Ist  $f \in q*B*q$ , so gibt es nach Hilfssatz 2 (und Anwenden der Konjugation mit  $t$ ) ein  $\varphi \in L$  mit  $f = \varphi * q$ , und  $\varphi$  erfüllt die Voraussetzung von (T). Also gilt für ein  $\eta \in qE$ :  $R'(f\eta) = SR(\varphi * q\eta) = SR(\varphi\eta) = S(\varphi R\eta)$ , da  $R$  eine  $L$ -lineare Abbildung ist. Mit (T) ergibt sich  $R'(f\eta) = \tilde{\varrho}(\varphi) SR(\eta) = \tilde{\varrho}(\varphi) \tilde{\varrho}(q) R'(\eta)$ , da Bild  $S \subseteq \tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$ , also  $R'(f\eta) = \tilde{\varrho}(f) R'(\eta)$ , w.z.b.w.

Um die Wohldefiniertheit von  $\tilde{R}$  zu beweisen, genügt es (wegen der Einfachheit des  $q*B*q$ -Moduls  $qE$ ) zu verifizieren, daß aus  $f\eta = 0$  ( $f \in B, \eta \in qE$ ) folgt, daß auch  $\tilde{\varrho}(f) R'\eta = 0$  oder  $\tilde{\varrho}(f) \tilde{\varrho}(q) R'\eta = 0$ . Dazu wiederum braucht man nur  $\tilde{\varrho}(D) \tilde{\varrho}(f) \tilde{\varrho}(q) R'\eta = 0$  oder auch nur  $\tilde{\varrho}(D * q * D) \tilde{\varrho}(f) \tilde{\varrho}(q) R'\eta = 0$  zu zeigen, weil mit  $D * p * D$  auch  $(D * p * D)' = D * q * D$  dicht in  $D$  liegt. Nun ist aber

$$\tilde{\varrho}(D * q * D) \tilde{\varrho}(f) \tilde{\varrho}(q) R'\eta = \tilde{\varrho}(D) \tilde{\varrho}(q * D * f * q) R'\eta = \tilde{\varrho}(D) R'(q * D * f * q\eta),$$

da  $R'$  linear über  $q*B*q$  ist.

Letzteres ist Null wegen  $f * q\eta = f\eta = 0$ .

Der Rest ist nun klar.  $\tilde{R}$  ist  $B$ -linear, und wegen  $\tilde{R}|_{qE} = R' \neq 0$  ist  $\tilde{R}$  nicht-trivial. Bis auf den Nachweis von (T) ist der Beweis von Satz 1 damit beendet.

Zu (T): Aus der Voraussetzung  $\varphi * q = q * \varphi * q$  folgt, daß

$$Q(\varphi(k)) = \int_G dy \int_H dh \Delta(y)^{-1} \bar{F}(y) F(h^{-1}yk) Q(\varphi(h)^{h^{-1}y^k})$$

für alle  $k \in H$  ist; denn:

Zunächst einmal stellen wir fest, daß aus der Definition von  $F, F(s) = \Delta(t)^{-1/2} \tilde{u}(ts)$ , und der Tatsache, daß  $t$  im Träger von  $\tilde{u}$  liegt, folgt, daß es in beliebiger Nähe des Einselementes Punkte  $s$  mit  $F(s) \neq 0$  gibt. Außerdem gilt  $F(sh) = 0 = F(hs)$  für alle  $h \in H, h \neq e$ , und alle  $s$  aus einer festen, genügend kleinen Umgebung. Zusammen bedeutet dies, daß es in der Menge

$$X := \{s \in G; F(s) \neq 0, F(sh) = F(hs) = 0 \quad \text{für alle } h \in H, h \neq e\}$$

ein gegen  $e$  konvergentes Netz gibt. Da  $\varphi * q$  und  $q * \varphi * q$  stetige Funktionen auf  $G$  sind, gilt die Gleichung  $\varphi * q = q * \varphi * q$  punktweise, speziell haben wir

$$(\varphi * q)(k)^s = (q * \varphi * q)(k)^s \quad \text{für } k \in H, s \in X$$

und dann auch

$$(*) \quad Q((\varphi * q)(k)^s) = Q((q * \varphi * q)(k)^s).$$

Nun ist

$$(\varphi * q)(k) = \int_H dx q(x^{-1}k) \varphi(x)^{x^{-1}k},$$

also

$$\begin{aligned} Q((\varphi * q)(k)^s) &= \int_H dx Q(q(x^{-1}k)^s \varphi(x)^{x^{-1}ks}) \\ &= \int_H dx \chi(q(x^{-1}k)^s) Q(\varphi(x)^{x^{-1}ks}), \end{aligned}$$

da  $Q(va) = \chi(v)Q(a)$  für  $v \in U, a \in A$ . Drückt man  $\chi(q(x^{-1}k)^s)$  durch  $F$  aus, so ergibt sich

$$Q((\varphi * q)(k)^s) = \int_H dx \int_H dh F(x^{-1}ksh) \bar{F}(sh) Q(\varphi(x)^{x^{-1}ks}).$$

In der Doppelsumme liefern nur  $h=e$  und  $x=k$  einen von Null verschiedenen Beitrag, also

$$Q((\varphi * q)(k)^s) = |F(s)|^2 Q(\varphi(k)^s).$$

Berechnen wir nun die rechte Seite von (\*). Zunächst ist

$$\begin{aligned} (q * \varphi * q)(k) &= \int_G dz q(kz)^{z^{-1}} (\varphi * q)(z^{-1}) \\ &= \int_G dz \int_H dh q(kz)^{z^{-1}} q(h^{-1}z^{-1}) \varphi(h)^{h^{-1}z^{-1}}, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} Q((q * \varphi * q)(k)^s) &= \int_G dz \int_H dh \chi(q(kz)^{z^{-1}s}) \cdot \chi(q(h^{-1}z^{-1})^s) Q(\varphi(h)^{h^{-1}z^{-1}s}) \\ &= \int_G dz \int_H dh \int_H da \int_H db F(ksa) \bar{F}(z^{-1}sa) \cdot F(h^{-1}z^{-1}sb) \bar{F}(sb) Q(\varphi(h)^{h^{-1}z^{-1}s}). \end{aligned}$$

Die Summation über  $a$  gibt nur für  $a = s^{-1}k^{-1}s$  einen Betrag, diejenige über  $b$  nur für  $b = e$ . Führen wir ferner in der Integration über  $z$  die neue Veränderliche  $y := z^{-1}sk^{-1}$  ein, so erhalten wir

$$Q((q * \varphi * q)(k)^s) = |F(s)|^2 \int_G dy \Delta(y)^{-1} \int_H dh \cdot \bar{F}(yks^{-1}k^{-1}s) F(h^{-1}yk) Q(\varphi(h)^{h^{-1}yk})$$

Aus (\*) folgt jetzt

$$Q(\varphi(k)^s) = \int_G dy \int_H dh \Delta(y)^{-1} \bar{F}(yks^{-1}k^{-1}s) F(h^{-1}yk) Q(\varphi(h)^{h^{-1}yk})$$

für alle  $k \in H, s \in X$ . Wir lassen nun, bei festem  $k \in H, s \in X$  ein gegen  $e$  konvergentes Netz durchlaufen. Natürlich können wir annehmen, daß die Elemente des Netzes mit dem gegebenen  $k$  vertauschen. Da  $s \mapsto Q(\varphi(k)^s)$  stetig ist, erhalten wir

$$Q(\varphi(k)) = \int_G dy \int_H dh \Delta(y)^{-1} \bar{F}(y) F(h^{-1}yk) Q(\varphi(h)^{h^{-1}yk}),$$

wie gewünscht.

Die in (T) behauptete Gleichheit  $S(\varphi\xi) = \tilde{\varrho}(\varphi)S\xi$  ist wegen  $\tilde{\varrho}(q)S\xi = S\xi$  und  $\varphi*q = q*\varphi*q$  äquivalent zu  $S(\varphi\xi) = \tilde{\varrho}(q)\tilde{\varrho}(\varphi)S\xi$  oder zu

$$\varphi\xi = S^{-1}\tilde{\varrho}(q)\eta,$$

wobei

$$\eta = \tilde{\varrho}(\varphi)S\xi$$

gesetzt ist.

Nun ist

$$S^{-1}\tilde{\varrho}(q)\eta = \int_G dy \Delta(y)^{-1/2} \bar{F}(y)\eta(y)$$

und

$$\begin{aligned} \eta(y) &= \int_H dh \varrho_2(Q(\varphi(h)^{h^{-1}y})) \Delta(y)^{-1/2} \varrho_1(\Phi_{h^{-1}y})\xi \\ &= \Delta(y)^{-1/2} \int_H dh \int_H dk \varrho_2(Q(\varphi(h)^{h^{-1}y})) F(h^{-1}yk) \varrho_1(k)\xi \\ &= \Delta(y)^{-1/2} \int_H dh \int_H dk F(h^{-1}yk) \varrho_1(k) \varrho_2(Q(\varphi(h)^{h^{-1}y}))\xi, \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} S^{-1}\tilde{\varrho}(q)\eta &= \int_H dk \varrho_1(k) \cdot \varrho_2\left(\int_G dy \int_H dh \Delta(y)^{-1} \bar{F}(y) F(h^{-1}yk) Q(\varphi(h)^{h^{-1}y})\right)\xi \\ &= \int_H dk \varrho_1(k) \varrho_2(Q(\varphi(k)))\xi = \varphi\xi, \quad \text{w.z.b.w.} \end{aligned}$$

*Bemerkung 2.* Wie in der in [5] betrachteten spezielleren Situation besteht auch hier ein enger Zusammenhang zwischen der  $q*B*q$ -Modulstruktur im Teil  $\tilde{\varrho}(q)\tilde{M}$  von  $\tilde{M}$  und der  $L'$ -Modulstruktur von  $M$ . Es existiert nämlich ein \*-Morphismus  $T: q*B*q \rightarrow L'$ , gegeben durch

$$(Tf)(h) = \int_G dx \int_G dz \Delta(x)^{-1/2} \Delta(z)^{-1} \bar{F}(xz) F(zh) Q(f(x)^{zh}),$$

mit  $S^{-1}(\tilde{\varrho}(f)\xi) = \varrho(Tf)S^{-1}\xi$ , d.h.,  $S^{-1}$  ist linear über  $T$ .

*Bemerkung 3.* Im Beweis von Satz 1 haben wir nirgendwo von der Involution in  $A$  Gebrauch gemacht, wohl aber von der in  $U$ , indem wir z. B. Elemente in  $U$  mit einer positiven Gelfand-Transformierten verwendet haben. In der Tat gilt der Satz auch für nicht-involutive Algebren  $A$ . Er wurde nur deshalb in der angegebenen Fassung formuliert, weil sich die potentiellen Anwendungen, z. B. auf Fragen der Symmetrie, auf involutive Algebren beziehen.

*Beweis des Korollars.* Eine involutive Banachsche Algebra  $A$  wird symmetrisch genannt, wenn das Spektrum von  $a^*a$  für alle  $a \in A$  im Intervall  $[0, \infty)$  liegt. Seit längerem ist bekannt (siehe etwa [3]), daß diese Eigenschaft einer involutiven Banachschen Algebra dazu äquivalent ist, daß es zu jedem einfachen  $A$ -Linksmodul  $E$  einen Hilbertschen Raum  $\mathcal{H}$ , eine involutive Darstellung von  $A$  in  $\mathcal{H}$  und eine  $A$ -lineare Einbettung von  $E$  in  $\mathcal{H}$  gibt. – Sei also, in der Situation des Korollars,  $E$  ein einfacher  $B$ - (Links)Modul. Auf Grund von Satz 1 gibt es einen einfachen  $L'$ -Modul  $M$

und eine  $B$ -lineare Einbettung  $E \rightarrow \tilde{M}$ . Da  $L'$  nach Voraussetzung symmetrisch ist, gibt es eine involutive Darstellung von  $L'$  in einem Hilbertschen Raum  $\mathcal{H}$  und eine  $L'$ -lineare Einbettung  $M \rightarrow \mathcal{H}$ . Diese Einbettung induziert eine  $B$ -lineare Einbettung von  $\tilde{M}$  in  $\mathcal{H} = \tilde{\mathcal{H}}$ , wobei die Darstellung von  $B$  in  $\mathcal{H}$  natürlich involutiv ist. Die Zusammensetzung aus  $E \rightarrow \tilde{M}$  und  $\tilde{M} \rightarrow \mathcal{H}$  liefert die gewünschte Einbettung.

Für die ins Auge gefaßten Anwendungen ist der Fall eines cokompakten diskreten Normalteilers  $H$  besonders wichtig. Hier kann man einen Einbettungssatz beweisen (und danach Folgerungen für die Frage nach der Symmetrie gewisser Algebren ziehen), auch wenn keine  $U$ -Modulstruktur auf  $A$  gegeben ist.

**Satz 2.** Sei  $G$  eine lokalkompakte Gruppe und  $H$  ein diskreter cokompakter Normalteiler in  $G$ . Weiter sei  $A$  eine Banachsche  $G$ -Algebra, d.h.,  $G$  operiere stark stetig durch isometrische Isomorphismen auf  $A$ . Dann gibt es zu jedem einfachen  $L^1(G, A)$ -Modul  $E$  einen einfachen  $L^1(H, A)$ -Modul  $M$  und eine  $L^1(G, A)$ -lineare Einbettung von  $E$  in den induzierten Modul  $\tilde{M}$ .

**Korollar 1.** Setzt man zusätzlich voraus, daß jeder einfache  $L^1(H, A)$ -Modul  $M$  „induziert“ ist von  $A$ , d.h., daß es allemal einen einfachen  $A$ -Modul  $J$  und eine  $L^1(H, A)$ -lineare Einbettung von  $M$  in  $L^2(H, J)$  – mit der offensichtlichen  $L^1(H, A)$ -Modulstruktur – gibt, so ist jeder einfache  $L^1(G, A)$ -Modul in einen Modul der Form  $L^2(G, J)$  einbettbar.

**Korollar 2.** Seien  $G, H$  und  $A$  wie im Satz. Zusätzlich sei  $A$  involutiv und  $G$  operiere durch  $*$ -Isomorphismen auf  $A$ . Dann folgt aus der Symmetrie von  $L^1(H, A)$  die Symmetrie von  $L^1(G, A)$ .

**Bemerkung 4.** Die Aussage von Korollar 2 ist auch im Spezialfall  $G = \mathbb{R}$  und  $H = \mathbb{Z}$  keineswegs trivial. Im Gegenteil, dieser Spezialfall liefert ein wesentliches Argument im Beweis des Hauptsatzes von [7], daß nämlich für exponentielle Liesche Gruppen  $G$  das Bild von  $L^1(G)$  unter irreduziblen involutiven Darstellungen in Hilbertschen Räumen stets Operatoren vom Rang 1 enthält.

**Bemerkung 5.** Die Aussagen von Satz 2 bzw. Korollar 1 sind reine Einbettungssätze. Es ist i.a. keineswegs so, daß der induzierte Modul, in den man einbetten kann, in irgendeinem Sinn irreduzibel wäre oder denselben Annulator hätte wie der Ausgangsmodul; dazu bedürfte es weiterer Voraussetzungen. Zur Illustration betrachte man das folgende einfache Beispiel:  $G$  kompakt,  $H$  trivial und  $A = \mathbb{C}$ . Dann bedeutet der Satz, daß man jeden einfachen  $G$ -Modul in  $L^2(G)$  einbetten kann, eine altbekannte und keineswegs völlig triviale Tatsache. – Wohl aber ist folgendes richtig (und leicht zu beweisen): Ist der einfache  $L^1(G, A)$ -Modul  $E$  einbettbar in  $L^2(G, J)$  – mit einem einfachen  $A$ -Modul  $J$  –, so stimmen die Annulatoren in  $A$  von  $E$  und  $L^2(G, J)$  überein.

**Beweis von Satz 2.** Sei  $\dot{G} := G/H$  die Quotientengruppe.  $\tilde{A}$  sei der Raum aller stetigen Funktionen von  $\dot{G}$  in  $A$ . Mit der Supremumsnorm und den punktweisen Operationen wird  $\tilde{A}$  zu einer Banachschen Algebra. Die Gruppe  $G$  operiere auf  $\tilde{A}$  durch  $f^x(t) = f(\dot{x}t)^x$ ;  $\tilde{A}$  wird so zu einer Banachschen  $G$ -Algebra.  $\tilde{A}$  enthält  $A$  als  $G$ -Unteralgebra, indem man  $A$  mit den konstanten Funktionen identifiziert. Folglich enthält

$\tilde{B} := L^1(G, \tilde{A})$  die Algebra  $B := L^1(G, A)$  als Unteralgebra. Die  $B$ -Modulstruktur auf  $E$  ist gegeben durch eine  $A$ -Modulstruktur  $(a, \xi) \rightarrow a\xi$  und eine  $G$ -Modulstruktur  $(x, \xi) \rightarrow x\xi$  mit  $x^{-1}a\xi = a^x x^{-1}\xi$ . Der Banachsche Raum  $\tilde{E}$  aller stetigen Funktionen von  $\tilde{G}$  in  $E$  wird zu einem  $\tilde{A}$ -Modul durch  $(f\varphi)(t) = f(t)\varphi(t)$ ,  $f \in \tilde{A}$ ,  $\varphi \in \tilde{E}$ , und zu einem  $G$ -Modul durch  $(x\varphi)(t) = x\varphi(x^{-1}t)$ . Diese beiden Wirkungen sind verträglich, d.h., es gilt  $x^{-1}f\varphi = f^x x^{-1}\varphi$ , und definieren folglich eine  $\tilde{B}$ -Modulstruktur auf  $\tilde{E}$ . Weiter läßt sich  $E$  mit den konstanten Funktionen in  $\tilde{E}$  identifizieren, und diese Identifizierung ist auch  $B$ -linear. Der Untermodul  $\tilde{B}E$  von  $\tilde{E}$  ist zyklisch und besitzt daher einen einfachen Quotienten  $E'$ . Es gibt also eine  $B$ -lineare Einbettung von  $E$  in den einfachen  $\tilde{B}$ -Modul  $E'$ . Um nun Satz 1 anwenden zu können, wählen wir für  $U$  den Raum aller stetigen, komplexwertigen Funktionen auf  $\tilde{G}$  und setzen  $\chi(f) = f(\tilde{e})$ .  $\tilde{A}$  ist in offensichtlicher Weise ein  $U$ -Modul, und man sieht leicht, daß das Quadrupel  $(G, H, U, \tilde{A})$  die Voraussetzungen von Satz 1 erfüllt. Die  $H$ -Algebra  $\tilde{A}' := \tilde{A}/(\text{Kern } \chi \tilde{A})^-$  ist aber offenbar kanonisch isomorph zur  $H$ -Algebra  $A$ . Auf Grund von Satz 1 gibt es nun einen einfachen  $L^1(H, \tilde{A}')$ -Modul  $M$  (= einfacher  $L^1(H, A)$ -Modul) und eine  $\tilde{B}$ -lineare Einbettung von  $E'$  in den induzierten Modul  $\tilde{M}$ . Die Zusammensetzung  $E \rightarrow E' \rightarrow \tilde{M}$  ergibt dann die gewünschte Einbettung.

*Beweis von Korollar 1.* Ebenso wie im Falle der „unitären Induktion“ gilt auch hier ein Theorem über „induction in stages“.

*Beweis von Korollar 2.* Dieses Korollar folgt ebenso aus Satz 2, wie oben das Korollar aus Satz 1 folgte.

Als weitere Anwendungen erhält man Aussagen über die Symmetrie Leptinscher Algebren mit Werten in  $C^*$ -Algebren.

**Satz 3.** Sei  $H$  ein diskreter cokompakter Normalteiler in der lokalkompakten Gruppe  $G$ .  $H$  liege in der Klasse der in [4] sogenannten „rigidly symmetric“ Gruppen, d.h., das projektive Tensorprodukt aus  $L^1(H)$  und einer beliebigen  $C^*$ -Algebra sei symmetrisch (nilpotente Gruppen haben beispielsweise diese Eigenschaft). Dann ist  $L^1(G, A)$  symmetrisch für jede  $G - C^*$ -Algebra  $A$ .

**Korollar.** Für jede lokalkompakte, kompakt erzeugte abelsche Gruppe  $G$  und jede  $G - C^*$ -Algebra  $A$  ist  $L^1(G, A)$  symmetrisch.

Das Korollar folgt sofort aus dem Satz, da auf Grund des Struktursatzes für lokalkompakte, kompakt erzeugte abelsche Gruppen in solchen Gruppen stets cokompakte diskrete Normalteiler existieren, die als abelsche Gruppen natürlich „rigidly symmetric“ sind.

*Beweis des Satzes.* Auf Grund von Korollar 2 zu Satz 2 genügt es zu zeigen, daß  $L^1(H, A)$  symmetrisch ist für jede  $H - C^*$ -Algebra  $A$ . Nun kann man aber  $A$  als  $H$ -Unteralgebra einer  $H - C^*$ -Algebra  $B$  realisieren, in welcher die  $H$ -Wirkung durch einen Homomorphismus in die unitäre Gruppe von  $B$  gegeben ist (z.B. adjungiere man an  $A$  ein Einselement, falls nicht schon vorhanden, und wähle für  $B$  das verschränkte  $C^*$ -Produkt [“crossed product”] von  $H$  mit dieser Algebra). Es genügt zu zeigen, daß  $L^1(H, B)$  symmetrisch ist. Eine durch einen Homomorphismus in die unitäre Gruppe gegebene Wirkung kann man aber „auflösen“, d.h.,  $L^1(H, B)$  ist als involutive Algebra isomorph zu  $L^1(H, B)$  mit trivialer Wirkung. Und letztere Algebra ist isomorph zum projektiven Tensorprodukt aus  $L^1(H)$  und  $B$ , welches nach Voraussetzung symmetrisch ist.

**Literatur**

1. Bonsall, F.F., Duncan, I.: Complete normed algebras, Ergebnisse der Mathematik 80. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1973
2. Leptin, H.: Verallgemeinerte  $L^1$ -Algebren und projektive Darstellungen lokalkompakter Gruppen. Invent. Math. **3**, 257–281 (1967); **4**, 68–86 (1967)
3. Leptin, H.: Symmetrie in Banachschen Algebren. Arch. Math. **27**, 394–400 (1976)
4. Leptin, H., Poguntke, D.: Symmetry and nonsymmetry for locally compact groups. J. Functional Analysis **33**, 119–134 (1979)
5. Poguntke, D.: Symmetry (or simple modules) of some Banach algebras. p. 177–193. In: Harmonic Analysis Iraklion 1978. Lecture Notes in Mathematics 781. Berlin, Heidelberg, New York: Springer 1980
6. Poguntke, D.: Symmetry and nonsymmetry for a class of exponential Lie groups. J. Reine Angew. Math. **315**, 127–138 (1980)
7. Poguntke, D.: Operators of finite rank in unitary representations of exponential Lie groups. Math. Ann. **259** (1982)
8. Rickart, C.E.: General theory of Banach algebras. New York: van Nostrand 1960
9. Rieffel, M.A.: Induced representations of  $C^*$ -algebras. Adv. Math. **13**, 176–257 (1974)

Eingegangen am 7. Oktober 1981