

Nilpotente Liesche Gruppen haben symmetrische Gruppenalgebren

Detlev Poguntke

Fakultät für Mathematik der Universität, Postfach 8640, D-4800 Bielefeld, Bundesrepublik Deutschland

Eine involutive (Banachsche) Algebra A heißt symmetrisch, wenn jedes Element der Form x^*x , $x \in A$, ein positives Spektrum hat. Für Banachsche Algebren ist diese Eigenschaft nach einem Satz von Shirali und Ford äquivalent zu der Tatsache, daß hermite'sche Elemente ein reelles Spektrum haben, vgl. [2]. Über die Bedeutung der Symmetrie, insbesondere für die Darstellungstheorie, sei hier nichts gesagt, vgl. dazu [12] und [13]. Dort findet man auch eine Zusammenstellung der vorhandenen Ergebnisse über die Symmetrie bzw. Nicht-Symmetrie von L^1 -Algebren lokalkompakter Gruppen G . Einige davon seien hier kurz wiedergegeben. Für eine zusammenhängende nicht-kompakte halbeinfache Liesche Gruppe G ist $L^1(G)$ nicht symmetrisch, [6]. Aber $L^1(G)$ ist symmetrisch, falls G eine diskrete, endlich-erzeugte, nilpotente Gruppe ist, [5], G eine Bewegungsgruppe, d. h. ein semidirektes Produkt einer kompakten Gruppe mit einem abelschen Normalteiler ist, [4], G eine $[FC]^-$ -Gruppe ist, d. h. falls $\{yx y^{-1}; y \in G\}^-$ für jedes $x \in G$ kompakt ist, [1], G eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe der Stufe 2 ist, [10].

Weiter ist die Klasse $[S]$ der lokalkompakten Gruppen G mit symmetrischen Gruppen-Algebren stabil gegen endliche Erweiterungen und gegen zerfallende kompakte abelsche Erweiterungen, d. h. mit M liegt auch $K \times M$ in $[S]$ für kompakte abelsche Gruppen K , [12]. In [13] hat Leptin gezeigt, daß gewisse semidirekte Produkte zusammenhängender abelscher Gruppen in $[S]$ liegen, insbesondere die „ $ax + b$ “-Gruppe. Diese Gruppen waren sämtlich vom Typ I, aber ich werde in einer folgenden Arbeit zeigen, daß auch die „kleinste“ auflösbare, zusammenhängende Liesche Gruppe, welche nicht vom Typ I ist, nämlich die „Mautner-Gruppe“, in $[S]$ liegt, wodurch die in [13] geäußerte Vermutung, daß alle zusammenhängenden auflösbaren Lieschen Gruppen in $[S]$ liegen, erhärtet wird. Das Ziel der vorliegenden Arbeit ist es jedoch, den in der Überschrift angegebenen Satz zu beweisen, unten als Satz 2 formuliert. Zuvor beweisen wir noch ein Lemma und Satz 1. Das Lemma ist eine ziemlich einfache Verallgemeinerung von Satz 2 aus [12] und enthält ein auf die Anwendung im Beweis von Satz 1 zugeschnittenes Kriterium für Symmetrie; den Beweis in [12] kann man nahezu Wort für Wort übernehmen. Satz 1 enthält den entscheidenden Schritt auf dem Wege zum Beweis der Symmetrie nilpotenter Liescher Gruppen. Obwohl ich bislang im wesentlichen

nur eine Anwendung von Satz 1 kenne, nämlich auf den nilpotenten Fall, habe ich die unten angegebene allgemeinere Formulierung von Satz 1 gewählt, da Aussicht besteht, unter Verwendung dieses Satzes zu zeigen, daß zusammenhängende auflösbare Liesche Gruppen vom Typ E in [S] liegen. Zum Beispiel kann man mit Satz 1 zeigen, daß eine Gruppe minimaler Dimension unter den nicht-symmetrischen, zusammenhängenden auflösbaren Lieschen Gruppen vom Typ E notwendigerweise ein eindimensionales Zentrum besitzt (natürlich nur, sofern es solche Gruppen überhaupt gibt).

Zunächst sei kurz an den Begriff der adjungierten Algebra erinnert, vgl. [7] und [8]. Dazu sei A eine involutive Banachsche Algebra, welche der Bedingung (L^*) aus [7] genügt, d. h. für alle $x \in A$ gelte

$$\|x\| = \sup_{\|y\| \leq 1} \|xy\|$$

($= \|L_x\|$, wenn $L_x: A \rightarrow A$ durch $w \rightarrow xw$ definiert ist). Offenkundig ist (L^*) von selbst erfüllt, wenn es in A eine beschränkte approximierende Eins gibt, d. h. ein Netz (e_λ) mit $\|e_\lambda\| = 1$ und $\lim_{\lambda} x e_\lambda = \lim_{\lambda} e_\lambda x = x$ für alle $x \in A$. Dann ist die Menge aller beschränkten linearen Operatoren $T: A \rightarrow A$, für welche ein (eindeutig bestimmter) beschränkter linearer Operator $T^*: A \rightarrow A$ mit $(Tx)^* y = x^* T^* y$ für $x, y \in A$ existiert, in der Operator-Norm eine involutive (mit Involution $T \rightarrow T^*$) Banachsche Algebra; diese wird mit A^b bezeichnet. Weiter ist $x \rightarrow L_x$ ein isometrischer *-Isomorphismus von A auf ein zweiseitiges abgeschlossenes Ideal in A^b ; A läßt sich mithin mit einem Ideal in A^b identifizieren, und wir werden im folgenden diese Identifikation ohne weiteren Kommentar benützen. Es sei noch bemerkt, daß $L^1(G)^b$ für eine lokal-kompakte Gruppe G nichts anderes als die Maßalgebra von G ist.

Lemma. *Es sei B eine involutive Banachsche Algebra mit beschränkter approximierender Eins. Ferner sei \mathcal{Q} eine Menge von Projektoren (d. h. $q = q^* = q^2$ für $q \in \mathcal{Q}$) in B^b . Zu jedem $(p, q) \in \mathcal{Q} \times \mathcal{Q}$ sei ein $v_{pq} \in B^b$ gegeben, und es gelte*

- (i) $v_{pq}^* = v_{qp}$.
- (ii) $v_{pq}q = v_{pq}$ (und dann auch, wegen (i), $v_{qp} = qv_{qp}$).
- (iii) $p = v_{pq}v_{qp} = v_{qp}^*v_{qp}$ für alle $p, q \in \mathcal{Q}$.
- (iv) Zu einer endlichen Teilmenge \mathcal{E} von \mathcal{Q} und einem ausgezeichneten Element $q \in \mathcal{E}$ mögen stets $q_1, \dots, q_n \in \mathcal{Q}$ existieren mit $q_1 = q, q_i q_j = \delta_{ij} q_i$ ($1 \leq i, j \leq n$) und derart, daß \mathcal{E} in dem von q_i und $v_{q_i q_j}$ ($1 \leq i, j \leq n$) aufgespannten linearen Teilraum liegt.

Weiter liege $\sum_{p, q \in \mathcal{Q}} pBq$ dicht in B .

Ist dann pBp symmetrisch für ein $p \in \mathcal{Q}$ (und mithin für alle), so ist B symmetrisch.

Beweis. Zunächst sei bemerkt, daß für $p, q \in \mathcal{Q}$ die Beziehung $(pBqBq)^- = pBq$ gilt. Die eine Inklusion ist trivial (pBq ist abgeschlossen!). Seien nun $x \in pBq$ und (e_α) eine approximierende Eins in B . Dann ist $x e_\alpha q \in pBqBq$ und $\lim_{\alpha} x e_\alpha q = x$.

Um die Symmetrie von B zu beweisen, verwenden wir die in (2) aus [12] gegebene Charakterisierung. Sei also L ein maximales modulares Linksideal in B .

Wir haben die Existenz einer nicht-trivialen stetigen hermite'schen positiv definiten Linearform f auf B mit $f(L)=0$ zu zeigen. Wegen der Dichtheit von $\sum_{p,q \in \mathcal{Q}} pBq$ gibt es $p, q \in \mathcal{Q}$ mit $pBq \not\subset L$. Dann ist aber auch $qBq \not\subset L$. Wenn nicht, so gälte $(pBq)(qBq) \subset L$ und mithin $L \supset (pBqqBq)^- = pBq$.

$L_0 := qBq \cap L$ ist ein echtes Linksideal in qBq . Weiter gilt $B = Bq + L$, und es gibt folglich eine Rechtseins e in Bq für L , also $eq = e$. Dann ist $qeq = qe$ eine Rechtseins für das Linksideal L_0 in qBq . L_0 ist also ein modulares Linksideal in der symmetrischen Algebra qBq , und es gibt mithin ein nicht-triviales, stetiges, hermite'sches, positiv definites Funktional f_0 auf qBq mit $f_0(L_0) = 0$.

Für $x \in B$ setzen wir (e^*Be liegt in $qBq!$)

$$f(x) = f_0(e^*xe)$$

und behaupten, daß dieses f unser Problem löst.

Zunächst zeigen wir, daß $f_0 = f|_{qBq}$; insbesondere ist dann $f \neq 0$. Für $x \in qBq$ ist $x - xe \in L \cap qBq = L_0$, mithin $f_0(x - xe) = 0$ oder $f_0(x) = f_0(xe)$. Da f_0 hermite'sch ist, gilt weiter $f_0(x) = f_0(x^*)^- = f_0(x^*e)^- = f_0(e^*x)$, also $f_0(x) = f_0(xe) = f_0(e^*x) = f_0(e^*xe) = f(x)$. Es gilt $f(L) = 0$; denn ist $x \in L$, so auch xe (wegen $x \equiv xe \pmod L$), und letztlich $e^*xe \in L$, also in L_0 . Daher ist $0 = f_0(e^*xe) = f(x)$. Offenkundig ist f hermite'sch. Wir müssen nur noch die Positivität von f zeigen. Wegen der Stetigkeit

von f genügt es zu beweisen, daß $f(x^*x) \geq 0$ für $x \in \sum_{p,r \in \mathcal{Q}} pBr$. In der Summen-Darstellung dieses x treten nur endlich viele p 's und r 's auf. Wegen (iv) und (ii) gibt es

$q_1, \dots, q_n \in \mathcal{Q}$ mit $q_i = q, q_i q_j = \delta_{ij} q_i$ und $x \in \sum_{i,j=1}^n q_i B q_j$. Für $v_{q_i q_j}$ schreiben wir dann

auch kurz v_{ij} . Es ist $x = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}$ mit $x_{ij} \in q_i B q_j$. Wir müssen e^*x^*xe in passender

Form darstellen. Nun ist $xe = \sum_{i,j=1}^n x_{ij}e = \sum_{i=1}^n y_i$ mit $y_i := \sum_{j=1}^n x_{ij}e \in q_i B q = q_i B q_1$.

Setzt man

$$z_i := v_{1i} y_i \in v_{1i} q_i B q = v_{1i} B q = q v_{1i} B q \subseteq q B q \quad (1 \leq i \leq n).$$

so gilt

$$z_i^* z_i = y_i^* v_{1i}^* v_{1i} y_i = y_i^* q_i y_i = y_i^* y_i.$$

Für $i \neq j$ ist

$$y_j^* y_i \in (q_j B q)^* (q_i B q) = q B q_j q_i B q = (0).$$

Daher ist

$$\begin{aligned} e^*x^*xe &= (xe)^*(xe) = \left(\sum_{i=1}^n y_i \right)^* \left(\sum_{j=1}^n y_j \right) = \sum_{i,j=1}^n y_i^* y_j \\ &= \sum_{i=1}^n y_i^* y_i = \sum_{i=1}^n z_i^* z_i \in q B q. \end{aligned}$$

Da nun f eine Fortsetzung von f_0 ist und f_0 positiv ist, gilt folglich $f(e^*x^*xe) = f_0\left(\sum_{i=1}^n z_i^*z_i\right) \geq 0$.

Satz 1. Seien G eine lokalkompakte abelsche Gruppe und A eine involutive symmetrische Banachsche Algebra mit beschränkter approximierender Eins. G wirke durch isometrische *-Isomorphismen auf A , $(a, x) \rightarrow a^x$ für $(a, x) \in A \times G$. Für jedes $a \in A$ sei $x \rightarrow a^x$ stetig. G wirkt dann auch auf A^b , und es sei eine abgeschlossene G -invariante, involutive, symmetrische Unter algebra U des Zentrums von A^b gegeben. Für jedes $u \in U$ sei $x \rightarrow u^x$ stetig. Das Spektrum \hat{U} von U sei gleich G , die Wirkung von G auf \hat{U} sei die Linkstranslation. Die Gelfand-Darstellung $u \rightarrow \hat{u} \in C_\infty(G)$ sei injektiv. $S(G) := \{\hat{u}; u \in U\}$ genüge den Bedingungen 1)–4) von p. 262 in [11]; insbesondere sei die Algebra $S_0(G)$ der in $S(G)$ gelegenen stetigen Funktionen mit kompaktem Träger dicht in $S(G)$ (für die von U induzierte Norm auf $S(G)$). Weiter habe U eine „approximierende Eins für A “, d. h. es gebe ein Netz $(u_\lambda)_{\lambda \in A}$ in U mit $\lim_{\lambda} u_\lambda f = f$ für alle $f \in A$. Unter diesen Voraussetzungen ist auch die verallgemeinerte L^1 -Algebra $B := L^1(G, A)$ symmetrisch.

Beweis. Wir wollen das im Lemma formulierte Kriterium für Symmetrie verwenden. Mit A besitzt auch B eine approximierende Eins, vgl. [8]. Weiter haben wir die Menge $\mathcal{Q} \subseteq B^b$ anzugeben. Zu diesem Zweck bilden wir die verallgemeinerte L^1 -Algebra $D := L^1(G, U) \cong L^1(G, S(G))$. D läßt sich kanonisch in B^b einbetten. Wichtig für den weiteren Beweis sind die beiden folgenden Eigenschaften von D :

(1) D ist eine einfache Banachsche Algebra.

(2) Die „reguläre Darstellung“ π von D in $\mathcal{H} := L^2(G)$, gegeben durch $(\pi(f)\xi)(x) = \int_G f(x+y)(-y)\xi(-y)dy$, wobei $f(x+y)$ als Element von $S(G)$ angesehen wird, ist eine topologische irreduzible *-Darstellung von D (siehe [9] und [11]).

Ist v eine reellwertige Funktion in $S_0(G)$ mit $\|v\|_2 = \left(\int_G |v(x)|^2 dx\right)^{1/2} = 1$, und bildet man dazu $q(x) := v^x v$, so liegt q in D , und $\pi(q)$ ist der Projektor auf den von v aufgespannten Teilraum von \mathcal{H} ; es ist $\pi(q) = \langle -, v \rangle v$. $J := \{f \in D; \pi(f) \text{ ist von endlichem Rang}\}$ ist dann ein involutives, zweiseitiges, von Null verschiedenes und mithin wegen (1) dichtes Ideal in D . Studiert man die im Beweis von Théorème 2 in [3] wirklich verwendeten Voraussetzungen, so stellt man fest, daß die dortige Argumentation im vorliegenden Fall auch stichhaltig ist; d. h. bezeichnet man mit \mathcal{H}' den von Elementen der Form $\pi(f)\xi$, $f \in J$, $\xi \in \mathcal{H}$ aufgespannten Unterraum von \mathcal{H} , so gilt:

(3) \mathcal{H}' ist dicht in \mathcal{H} .

(4) \mathcal{H}' ist invariant unter $\pi(D)$.

(5) \mathcal{H}' ist der kleinste von Null verschiedene, unter $\pi(J)$ invariante Unterraum von \mathcal{H} .

(6) $\pi(J)$ besteht genau aus den beschränkten linearen Operatoren T endlichen Ranges auf \mathcal{H} mit $T(\mathcal{H}) \subset \mathcal{H}'$ und $T^*(\mathcal{H}) \subseteq \mathcal{H}'$.

Es sei nun \mathcal{Q} die Menge derjenigen $q \in D$, für die $\pi(q)$ ein Projektor vom Rang 1 ist. Da π wegen (1) injektiv ist, erkennt man an dem durch (6) vermittelten Bild von J

sofort, daß zu diesem \mathcal{Q} ein Satz von Elementen $\{v_{pq}\}$ mit den Eigenschaften (i)–(iv) aus dem Lemma existiert. Weiter gilt $v_{pp} = p$ für alle $p \in \mathcal{Q}$, und J ist die lineare Hülle von \mathcal{Q} .

Wir wollen nun die Dichtheit von $\sum_{p,q \in \mathcal{Q}} pBq$ beweisen.

Es ist $\sum_{p \in \mathcal{Q}} pB = JB$ und mithin $\left(\sum_{p \in \mathcal{Q}} pB\right)^- = (JB)^- = (DB)^-$. Ist nun $(u_\lambda)_{\lambda \in A}$ eine approximierende Eins in U für A und $(e_\mu)_{\mu \in M}$ eine approximierende Eins in der gewöhnlichen Gruppenalgebra $L^1(G)$, so kann man wie in [8] zeigen, daß $(e_\mu u_\lambda)_{(\mu, \lambda) \in M \times A}$ eine approximierende Eins in D für B ist, d. h. daß $\lim_{\mu, \lambda} e_\mu u_\lambda f = f$ für alle $f \in B$ ist. Folglich ist

$$\left[B = (DB)^- = (BD)^- = \left(\sum_{q \in \mathcal{Q}} Bq\right)^- = \left(\sum_{q \in \mathcal{Q}} qB\right)^-\right]$$

und dann auch $\left(\sum_{p, q \in \mathcal{Q}} pBq\right)^- = B$. Mit Hilfe des Lemmas sind wir fertig, wenn wir nun noch ein $q \in \mathcal{Q}$ angeben können, für welches qBq symmetrisch ist. Da wir oben explizit solche q 's konstruiert haben, genügt es zu zeigen:

(7) Sei $u = u^* \in U$, $v := \hat{u}$ liege in $S_0(G)$, und es gelte $\|v\|_2 = 1$. Definiert man dann $q \in \mathcal{Q} \subset D$ durch $q(x) = u^*x$, so ist qBq symmetrisch.

Für das folgende seien u, v und q wie oben fest gewählt. Bevor wir (7) beweisen können, müssen wir einige Eigenschaften der Elemente in qBq zusammenstellen. Dafür benötigen wir zunächst:

(8) Ist $h \in A$ und $(x \rightarrow u^{-x}u^{-x}h) \in L^1(G, A)$, so gilt $h = \int_G u^{-x}u^{-x}h dx$.

Zu (8): Da U eine approximierende Eins für A besitzt und $S_0(G)$ in $S(G)$ dicht liegt, genügt es zu zeigen, daß $wh = w \int_G u^{-x}u^{-x}h dx$ für alle $w \in U$ mit $\hat{w} \in S_0(G)$ gilt. Für solche w ist obige Gleichung aber wegen $w = \int_G wu^{-x}u^{-x} dx$ ($\|w\|_2 = 1!$) offenkundig erfüllt.

(9a) Sei $f \in qB \subseteq L^1(G, A)$. Dann gibt es eindeutig $h \in A$ mit $f(x) = u^*h$ für fast alle $x \in G$. Es ist $h = \int_G u^{-x}f(-x) dx = \int_G u^{-x}u^{-x}h dx$. Gilt umgekehrt für ein $h \in A$, daß $(x \rightarrow u^*h) \in B$, so liegt $(x \rightarrow u^*h)$ in qB .

Da $(qB)^* = Bq$, gibt es auch eine „duale Fassung“:

(9b) Sei $g \in Bq$. Dann gibt es eindeutig $k \in A$ mit $g(x) = uk^*$ für fast alle $x \in G$. Es ist $k = \int_G u^{-x}g(x)^{-x} dx = \int_G u^{-x}u^{-x}k dx$. Gilt umgekehrt für ein $k \in A$, daß $(x \rightarrow uk^*) \in B$, so liegt $(x \rightarrow uk^*)$ in Bq .

Zu (9a): Für fast alle $x \in G$ gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= (q*f)(x) = \int_G q(x+y)^{-y} f(-y) dy = \int_G (u^{x+y}u)^{-y} f(-y) dy \\ &= \int_G u^x u^{-y} f(-y) dy = u^x \int_G u^{-y} f(-y) dy, \end{aligned}$$

da letzteres Integral wegen $\|u^{-y}f(-y)\| \leq \|u^{-y}\| \|f(-y)\| = \|u\| \|f(-y)\|$ existiert. Aus (8) folgt zum einen die Eindeutigkeit von h und zum anderen, daß Elemente der Form $x \rightarrow u^x h$ in qB liegen, sofern sie nur in B liegen, also integrierbar sind.

(9b) beweist man ähnlich. Indem man ausnutzt, daß die Involution in B durch $f^*(x) = [f(-x)^x]^*$ erklärt ist, kann man auch (9b) direkt aus (9a) herleiten. (9a) und (9b) verwenden wir nun zur Bestimmung von $qBq = qB \cap Bq$.

(10) Ist $f \in qBq$, so gibt es eindeutig $h \in A$ mit $u^x h = u h^x$ für alle $x \in G$ und $f(x) = u^x h$ für fast alle $x \in G$. Ist umgekehrt $h \in A$ mit $u^x h = u h^x$ für alle $x \in G$ und liegt $(x \rightarrow u^x h)$ in B , so liegt dieses Element in qBq . Dieses Element ist genau dann hermitesch in B bzw. in qBq , wenn $h = h^*$.

Zu (10): Nach (9a) und (9b) ist $f(x) = u^x h$ und $f(x) = u k^x$ für fast alle $x \in G$ mit wohlbestimmten $h, k \in A$. Wir haben $h = k$ zu zeigen. Da $x \rightarrow u^x h$ und $x \rightarrow u k^x$ stetig sind, gilt $u^x h = u k^x$ für alle x ; insbesondere ist $u h = u k = k u$. Nach (9a, b) ist

$$\begin{aligned} k &= \int_G u^{-x} f(x)^{-x} dx = \int_G u^{-x} u h^{-x} dx = \int_G u(uh)^{-x} dx = \int_G u(ku)^{-x} dx \\ &= \int_G u k^{-x} u^{-x} dx = \int_G f(-x) u^{-x} dx = h. \end{aligned}$$

Es sind nun nur noch die hermite'schen Elemente in qBq zu charakterisieren. Es sei $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = u h^x$ für alle $x \in G$. Dann gilt $f^*(x) = \{f(-x)^x\}^* = \{(u h^{-x})^x\}^* = \{u^x h\}^* = u^x h^*$ (u ist hermite'sch). Also gilt $f = f^*$ genau dann, wenn $h = h^*$.

(11) Sei $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = u h^x$. Dann ist $h h^x = h^x h$ für alle $x \in G$ und folglich $h^y h^x = h^x h^y$ für alle $x, y \in G$.

Zu (11): Nach (8) ist

$$\begin{aligned} h h^x &= \int_G u^{-y} u^{-y} h^y h^x dy = \int_G u^{-y} u^{-y} h h^x dy = \int_G u^{-y} u h^{-y} h^x dy \\ &= \int_G u^{-y} h^{-y} u h^x dy = \int_G u^{-y} h^{-y} u^x h dy = \int_G u^{-y} h^x u^{-y} h dy, \end{aligned}$$

da $h^y u^x = h^x u^y$ für alle $x, y \in G$.

Unter erneuter Verwendung von (8) erhält man letztlich $h h^x = h^x h$. Der Träger von $v = \hat{u}$ sei mit K bezeichnet. Dann gilt $q(x) = u^x u = 0$ für $x \notin L := K + (-K)$ und weiter

(12) Ist $f \in qBq$ gegeben durch $f(x) = u^x h = u h^x$, so ist $h^x h = h h^x = 0$ für $x \notin L$.

Zu (12): Für alle $x \in G$ ist

$$u h^x = u^x h = u^x \int_G u^{-y} u^{-y} h^y dy = u^x \int_G u^{-y} u h^{-y} dy = \int_G u^{-y} u^x u h^{-y} dy$$

und folglich $u h^x = u^x h = 0$ für $x \notin L$. Oben, in (11), hatten wir als Zwischenergebnis $h h^x = \int_G u^{-y} h^{-y} u^x h dy$ für alle $x \in G$. Daraus folgt (12) nun unmittelbar.

Wir kommen nun schließlich

Zu (7): Es genügt zu zeigen, daß das Spektrum eines hermite'schen Elementes $f \in qBq$ reell ist. Wir haben also zu zeigen, daß die Gleichung

$$fg = \lambda g + f \tag{*}$$

für ein gegebenes $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ eine Lösung $g \in qBq$ besitzt. Wenn man nämlich (*) lösen kann, so besitzt auch jede Gleichung $fg' = \lambda g' + b$ mit $b \in qBq$ eine Lösung g' in qBq und, durch Anwenden der Involution, auch jede Gleichung $g'f = \lambda g' + b$; also gilt $(f - \lambda)B = B(f - \lambda) = B$. Um nun (*) zu lösen, setzen wir $w := \int_L u^{-x} h^{-x} dx = \int_L u^x h^x dx \in A$, wenn f durch h gegeben ist, wenn also $f(x) = u^x h = u h^x$ ist. Da f nach Voraussetzung hermite'sch ist, ist $h = h^*$ nach (10) und wegen $u = u^*$ und der Zentralität von u ist $w = w^*$. Laut Voraussetzung ist A symmetrisch, und die Gleichung

$$wk = \lambda k + h \tag{**}$$

besitzt folglich eine eindeutig bestimmte Lösung $k \in A$. Da $x \rightarrow u^x w$ einen kompakten Träger hat, hat auch $x \rightarrow u^x wk$ einen kompakten Träger und liegt nach (9a) in qB .

Dann liegt aber auch g , definiert durch $g(x) = u^x k$, in qB , da $g(x) = \frac{1}{\lambda} \{u^x wk - u^x h\}$.

Nach (11) vertauscht h^y mit w für alle $y \in G$, es gilt daher $wh^y k = \lambda h^y k + h^y h$ für alle $y \in G$. Nach (12) ist $h^y h = 0$ für $y \in G \setminus L$ und mithin $h^y k = 0$ für $y \in G \setminus L$, da $w - \lambda$ wegen der Symmetrie von A ein invertierbarer Operator auf A ist. Wir zeigen nun, daß $g \in qB$ eine Lösung von (*) ist.

Es gilt

$$\begin{aligned} (f * g)(x) &= \int_G f(x+y)^{-y} g(-y) dy = \int_G (u^{x+y} h)^{-y} u^{-y} k dy = \int_G u^x h^{-y} u^{-y} k dy \\ &= \int_L u^x h^{-y} u^{-y} k dy, \end{aligned}$$

da $h^{-y} k = 0$ für $y \in G \setminus L$.

Also gilt $(f * g)(x) = u^x wk = u^x (\lambda k + h)$ oder $f * g = \lambda g + f$. Dann ist aber $g * q$ eine Lösung von (*) in qBq und Satz 1 ist bewiesen.

Es ist nun recht einfach, unser Hauptergebnis zu beweisen.

Satz 2. Sei G eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe. Dann ist $L^1(G)$ eine symmetrische Algebra.

Beweis. Wir beweisen den Satz durch Induktion über $\dim G$. Falls $\dim G = 1$, so ist G kommutativ und $L^1(G)$ bekanntlich eine kommutative symmetrische Algebra. Sei nun $\dim G =: n > 1$. Da Quotienten symmetrischer Algebren offenkundig symmetrisch sind, kann man o.B.d.A. annehmen, daß G einfach-zusammenhängend ist. Wie in [12] dargelegt, genügt es zu zeigen: Ist ϱ eine beschränkte, algebraisch irreduzible Darstellung von $L^1(G)$ in dem Banachschen Raum E und ist $P := \text{Kern } \varrho \cap (\text{Kern } \varrho)^*$, so ist $L^1(G)/P$ symmetrisch.

Wegen seiner Kürze sei dieses Argument hier kurz wiederholt. Wäre nämlich $L^1(G)$ nicht symmetrisch, so gäbe es $f \in L^1(G)$ mit $L^1(G)(1 + f * f) \subsetneq L^1(G)$. Zu dem modularen Linksideal $L^1(G)(1 + f * f)$ gäbe es dann ein umfassendes maximales modulares Linksideal A mit Rechtseins $-f * f$. Man hätte dann eine beschränkte, algebraisch irreduzible Darstellung ϱ von $L^1(G)$ in $E := L^1(G)/A$, aber $L:$

$= L^1(G)/\text{Kern } \varrho \cap (\text{Kern } \varrho)^*$ wäre nicht symmetrisch, da $L(1 + g^*g) \not\subseteq L$, wenn g das Bild von f in L bezeichnet. Seien nun E, ϱ und P wie oben. Wie im Falle unitärer Darstellungen stammt ϱ von einer beschränkten stetigen Darstellung der Gruppe, welche ebenfalls mit ϱ bezeichnet sei (vgl. [11], insb. p. 266), d. h. es gibt einen beschränkten, stark stetigen Homomorphismus ϱ von G in die Gruppe der beschränkten invertierbaren Operatoren auf E mit $\varrho(f) = \int_G f(x)\varrho(x)dx$ für $f \in L^1(G)$.

Da ϱ beschränkt und E algebraisch irreduzibel ist, gibt es einen Charakter γ des Zentrums Z von G mit $\varrho(z) = \gamma(z)1_E$ für $z \in Z$. $L^1(G)/P$ ist ein Quotient von $L^1(G)/\text{Kern } \gamma$. Ist nun $\dim \text{Kern } \gamma > 0$, so ist nach Induktionsvoraussetzung $L^1(G)/\text{Kern } \gamma$ und dann auch $L^1(G)/P$ symmetrisch. Wir können also $\dim \text{Kern } \gamma = 0$ annehmen; insbesondere ist dann $\dim Z = 1$. Nach Kirillows Lemma, vgl. [14], gibt es einen zweidimensionalen Normalteiler $N \supset Z$, einen Normalteiler H der Codimension 1 ($H = \text{Zentralisator von } N \text{ in } G$) und ein Komplement R zu H derart, daß $G = R \ltimes H$ und daß $R \ltimes N$ die dreidimensionale Heisenberg-Gruppe ist. Wir dividieren nun $\text{Kern } \gamma$ aus und bezeichnen die erhaltenen Gruppen $G/\text{Kern } \gamma$, $H/\text{Kern } \gamma$... erneut mit G, H, \dots . Für die durch ϱ und γ indizierten Homomorphismen schreiben wir ebenso wieder ϱ und γ . Dann ergibt sich die folgende Situation: $G = R \ltimes H$ hat ein eindimensionales kompaktes Zentrum Z . Für $z \in Z$ gilt $\varrho(z) = \gamma(z)1_E$ mit einem nun treuen Charakter γ von Z . Es ist die Symmetrie von $L^1(G)/P$ zu zeigen. Dazu sei $L^1(G)_\gamma$ die Menge aller $f \in L^1(G)$ mit $f(xz) = \gamma(z)f(x)$ für (fast) alle $x \in G$ und $z \in Z$. Es sei $T_\gamma: L^1(G) \rightarrow L^1(G)$ definiert durch $(T_\gamma f)(x) = \int_Z \gamma(z)f(xz)dz$,

wobei dz hier das normierte Haarsche Maß von Z bezeichnet. Offenbar ist T_γ ein idempotenter Morphismus von $L^1(G)$ auf $B := L^1(G)_\gamma$, und an der Integraldarstellung von ϱ , $\varrho(f) = \int_G f(x)\varrho(x)dx$, erkennt man leicht, daß $\varrho = \varrho \circ T_\gamma$. Also ist $L^1(G)/P$ ein Quotient von $L^1(G)/\text{Kern } T_\gamma \cong B$, und es genügt, die Symmetrie dieser Algebra zu beweisen.

Analog zu $L^1(G)_\gamma$ kann man auch die Algebren $A := L^1(H)_\gamma \subseteq L^1(H)$ und $U := L^1(N)_\gamma \subseteq L^1(N)$ bilden. $L^1(G)$ fassen wir nun als verallgemeinerte L^1 -Algebra $L^1(R, L^1(H))$ auf mit trivialem Faktorensystem und der durch die zu R gehörigen inneren Automorphismen induzierten Wirkung von R auf $L^1(H)$. Offenkundig ist B dann gerade die Unteralgebra $L^1(R, A)$. U ist isometrisch *-isomorph zu $L^1(\mathbb{R})$ und hat mithin das Spektrum $\mathbb{R} = R$. Ferner ist U als zentrale Unteralgebra von $L^1(H)^b$ (= Maßalgebra von H) und dann auch von A^b auffaßbar. A ist als abgeschlossene *-Unteralgebra von $L^1(H)$ nach Induktionsvoraussetzung symmetrisch. Man überlegt sich leicht, daß auch die übrigen Voraussetzungen von Satz 1 in der vorliegenden speziellen Situation erfüllt sind. B ist folglich symmetrisch, und Satz 2 ist bewiesen.

Wir schließen mit der folgenden

Bemerkung. Aus Satz 2 ergibt sich mit Hilfe von (6) aus [12], daß für eine zusammenhängende nilpotente Liesche Gruppe G die Menge der Kerne topologisch irreduzibler *-Darstellungen von $L^1(G)$ mit der Menge der primitiven Ideale (im Sinne der Algebra) und mit der Menge der maximalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale übereinstimmt.

Literatur

1. Anusiak, Z.: Symmetry of L^1 -group algebras of locally compact groups with relatively compact classes of conjugated elements. Bull. Acad. Pol. Sci. **18**, 329—332 (1970)
2. Bonsall, F.F., Duncan, I.: Complete normed algebras. Ergebnisse der Mathematik 80. Berlin-Heidelberg-New York: Springer 1973
3. Dixmier, J.: Opérateurs de rang fini dans les représentations unitaires. Publ. math. Inst. Hautes Etudes scient. **6**, 305—317 (1960)
4. Gangolli, R.: On the symmetry of L^1 -algebras of locally compact motion groups and the Wiener Tauberian theorem. Preprint Seattle (1975)
5. Hulanicki, A.: On symmetry of group algebras of discrete nilpotent groups. Studia Math. **35**, 207—219 (1970)
6. Jenkins, J.: Nonsymmetric group algebras. Studia Math. **45**, 295—307 (1973)
7. Leptin, H.: Verallgemeinerte L^1 -Algebren und projektive Darstellungen lokal kompakter Gruppen. I. Inventiones math. **3**, 257—281 (1967)
8. Leptin, H.: Darstellungen verallgemeinerter L^1 -Algebren. Inventiones math. **5**, 192—215 (1968)
9. Leptin, H.: On group algebras of nilpotent Lie groups. Studia Math. **47**, 37—49 (1973)
10. Leptin, H.: Harmonische Analyse auf gewissen nilpotenten Lieschen Gruppen. Studia Math. **48**, 201—205 (1973)
11. Leptin, H.: Ideal theory in group algebras of locally compact groups. Inventiones math. **31**, 259—278 (1976)
12. Leptin, H.: Symmetrie in Banachschen Algebren. Erscheint im Archiv der Mathematik
13. Leptin, H.: Lokal kompakte Gruppen mit symmetrischen Algebren. Vorabdruck, Bielefeld (1976)
14. Pukanszky, L.: Leçons sur les représentations des groupes. Paris: Dunod 1967

Eingegangen am 5. Juli 1976